

連続体近似による道路設備予備部品の最適配置計画

OPTIMAL LOCATION PLANNING OF ROAD FACILITY SPARE PARTS
BY CONTINUUM APPROXIMATION

福山峻一*

Shunichi FUKUYAMA

*地域計画学研究室/先端社会基盤学研究室（指導教員：奥村誠教授，研究指導教員：水谷大二郎助教）

高速道路上のETC施設は経年劣化により故障し、故障発生から復旧までの故障継続時間に応じて交通渋滞などの利用者損失を誘発する。この際、施設予備部品の配置場所によって故障継続時間は変動するため、利用者損失を減少させるような予備部品の配置計画が求められる。本稿では、所与の故障確率の下で予備部品の配置場所に応じた利用者損失を定量化し、配置に掛かる費用と、利用者損失の総和を最小化するような、予備部品の最適配置計画を導出することを目的とする。このような数理最適化問題は、高次元の離散最適化問題となるため、一般的な状況で解析解を導出するのは困難である。そのため、連続体近似とネットワーク埋め込みに基づく近似的解法を提案し、計算の効率化を図る。実証分析では提案した方法論を実高速道路ネットワークに適用し、その有用性を議論する。

Key Words: *continuum approximation, location problem, asset management, Isomap, ETC facility*

1. はじめに

高速道路の管理主体は、事業の経済性を担保しつつ、利用者に対して利便性や快適性、安全性を提供する維持管理運営が求められる。例えば本稿で対象とするETC施設といった道路設備では、個々の施設の故障を事前に防ぐ、予防保全に重点を置いた維持管理では、高頻度の点検や更新が必要となり、経済的に好ましくないため、事後保全を許容した維持管理がとられるが、そのためには故障時の利用者への影響の定量的評価が必要となる。ETC施設の実際の維持管理では、予備部品の拠点を備蓄しておき、故障時に予備部品の故障現場まで運んでから復旧や修理が行われる。そのため、予備部品の配置場所によって、故障の継続による利用者損失が変動する。この際、故障対応の迅速性と備蓄場所を増やすことで生じる新設費用や維持管理費用との間にはトレードオフ関係が存在するため、ETC施設の故障の起こりやすさを事前に考慮し、故障時の損失を迅速性と対応づけて金銭評価することで、トレードオフ関係に対してバランスを取るような予備部品の配置場所と配置時期を決める必要がある。

上記問題を、利用者損失と新設費用、維持管理費用の総和を最小化する最適化問題として解くことを考える。このような問題は、動的施設配置問題（DFLP: Dynamic Facility Location Problems）に分類され、一般的に混合整数計画問題（MIP: Mixed Integer Programming）として以下のように定式化される。

離散時間軸からなる計画期間 $\mathcal{T} = \{t: 0, \dots, T\}$ と、それぞれ異なる故障過程を持つETC施設の集合 $\mathcal{I} = \{i: 1, 2, \dots, |\mathcal{I}|\}$ 、施設の予備部品の備蓄する拠点の配置候補点 $\mathcal{J} = \{j: 1, 2, \dots, |\mathcal{J}|\}$ を定義し、決定変数は施設に対する拠点の割り当てを表す $v_{i,j,t} = \{1, 0\}$ および、拠点配置の有無を表す $w_{j,t} = \{1, 0\}$ を用いる。次に、施設 i の時点 t における故障確率を $P_i(t)$ 、利用者損失は

施設との距離 $d_{i,j}$ に対する関数として $\alpha(d_{i,j})$ で与える。また、各期間 $[t, t+1)$ における拠点の維持管理費用を $C_b(j,t)$ 、時点 t の新設費用を $h(j,t)$ をとする。さらに、拠点の増設は認めるが、廃止は行わないとすると、割引因子 γ の下でMIPの目的関数は、

$$\min_{\{v_{i,j,t}, w_{j,t}\}} Z = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t \in \mathcal{T}} \gamma^t P_i(t) \alpha(d_{i,j}) v_{i,j,t} \quad (1)$$

$$+ \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}} \gamma^t \{C_b(j,t) w_{j,t} + h(j,t)(w_{j,t} - w_{j,t-1})\}$$

$$\text{s.t. } v_{i,j,t}, w_{j,t} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, t \quad (2)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} v_{i,j,t} = 1 \quad \forall j, t \quad (3)$$

$$v_{i,j,t} \leq w_{j,t} \quad \forall i, j, t \quad (4)$$

$$w_{j,t} \leq w_{j,t+1} \quad \forall j, t \quad (5)$$

となる。ここで、各時点 t の最適な拠点配置数 $n^*(t)$ は、MIPの決定変数より以下の式で求まる。

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_{j,t} = n^*(t) \quad \forall t \quad (6)$$

このようなMIPモデルは、候補地点における拠点の配置の有無をバイナリ変数の集合として、計画期間内の全ての時間に対して同時に決定する。そのためNP困難となり、実用上の問題を解く際は何かしらのヒューリスティクスや近似手法を用いることとなる。

上記の問題に対し、本稿では連続体近似（CA: Continuum Approximation）ベースのアプローチを採用し、離散的なDFLPのMIPモデルを連続・微分可能な密度関数で近似することを提案する。Wang et al.¹⁾ は大規模な成長市場におけるDFLPの解法としてCAモデルを提案し、DFLPの離散解を導出している。著者は当該研究がCAのDFLPへの実装に関する先駆的な研究であると考えており、本稿では当該研究を一部援用する。また、CAは目的関数を連続関数とする性質上、ユーク

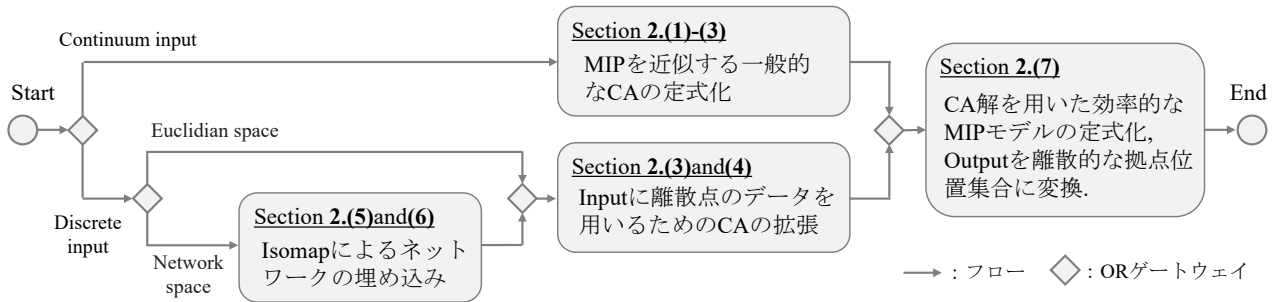


図-1: 提案手法の流れ

リッド空間上の連続領域での施設配置を扱うことがほとんどであり、高速道路といったネットワークを扱う論文は著者の知る限りではまだない。本稿では、Tenenbaum et al.²⁾による Isomap アルゴリズムを用いて、道路ネットワークをユークリッド空間に埋め込むことで、CA を適用可能にすることを検討する。ネットワーク上の DFLP に対する、CA と埋め込み手法である Isomap の組み合わせを用いた効率的解法の提案は、本稿の新規性であり、ETC 施設の維持管理という実問題に対して、提案手法を用いた実証分析を行うことに本稿の有用性がある。

以上より、確率的な故障に伴って生じる利用者損失に対して、トレードオフ関係を満足する投資費用の下、動的に予備部品拠点の位置を定める DFLP を定式化する。さらに、Isomap を用いたネットワーク埋め込みにより、CA の適用可能な問題設定を拡張し、道路ネットワークに対する問題の提案手法による効率化を示す。以下、図-1 に示すフローの下で提案手法について述べ、その後、提案手法による実証分析とまとめを行う。

2. 提案手法

(1) CA の概要

1. で定義した ETC 施設と拠点は、計画期間 $\Psi = [0, T]$ で、ユークリッド空間上の連続領域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ に存在、もしくは配置されるとする。この時、CA は式 (1) のように離散的な拠点の位置 $w_{j,t}$ とその割り当てを $v_{i,j,t}$ 出力するのではなく、連続的な計画時空間における任意の位置 $x \in \Omega$ 及び時点 $t \in \Psi$ に対する連続関数 $A(x, t)$ の最適解を出力する。 $A(x, t)$ は、時点 t において、位置 x 近傍に存在しうる、 x を割り当て範囲に含む拠点の領域面積の平均、もしくは x の近傍の連続拠点密度の逆数として解釈できる。この際、目的関数の入力データである故障確率や新設費用、維持管理費用などは、時空間上における連続関数として与える必要がある。

(2) CA モデルの定式化

式 (1) を近似する CA モデルの目的関数は以下のように定式化される。

$$\min_{A(x,t)} Z_C = \int_{\Psi} \int_{\Omega} \gamma^t \left[p(x, t) \alpha_C(x, A(x, t)) + \frac{C_{b,c}(x, t)}{A(x, t)} + \frac{h_C(x, t)}{A(x, t)T} \right] dx dt \quad (7)$$

$$\text{s.t. } A(x, t) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, t \in \Psi \quad (8)$$

このとき、 $p(x, t)$ は任意の位置と時点 (x, t) における ETC 施設の故障確率密度であり、 $C_{b,c}(x, t)$ 、 $h_C(x, t)$ は拠

点の維持管理費用、新設費用である。また、 $\alpha_C(x, A(x, t))$ は $A(x, t)$ が与えられた際の (x, t) における故障時の利用者損失である。

CA モデルでは位置 x 及び時点 t に対する連続関数の最適値 $A^*(x, t)$ は、式 (7) の導関数を 0 にする値として、以下のように近似される。

$$\frac{\partial}{\partial A(x, t)} [p(x, t) \alpha_C(x, A^*(x, t))] - \frac{C_{b,c}(x, t)T + h_C(x, t)}{T} [A^*(x, t)]^{-2} = 0 \quad \forall x, t \quad (9)$$

また、時点 t における拠点の最適配置数は、 $A^*(x, t)$ を用いて次のように近似される。

$$n^*(t) = \left\lfloor \int_{\Omega} \frac{1}{A^*(x, t)} dx \right\rfloor \quad \forall t \quad (10)$$

ここで、 $\lfloor \cdot \rfloor$ は最も近い整数への丸め込みを表す。

(3) CA における利用者損失の算出

CA は離散的な拠点の配置位置を決定するものではないため、利用者損失は施設と拠点間の距離の関数として定義することができず、 $A(x, t)$ に関する関数として定式化する必要がある。 $A(x, t)$ の形状を円であると仮定した場合、施設と拠点間の距離はその半径内に収まることから、利用者損失の期待値は以下のように表される。

$$\alpha_C(x, A(x, t)) = \int_0^{\sqrt{\frac{A(x,t)}{\pi}}} \frac{2\pi r}{A(x, t)} \alpha(r) dr \quad (11)$$

(4) 離散点のデータを入力値とするための CA モデルの再定式化

2.(1),(2) で定式化した一般的な CA は、入力に時空間の連続関数をとるため、ETC の故障確率のような離散点の入力値を用いることはできない。従って、Peng et al.³⁾ で提案された手法を用いて CA 拡張する。まず、施設の位置集合を $X_f = \{x_i : i \in I\}$ とし、計画空間の境界領域 Ω を与える。次に、 x_i を母点として $\cup_{i \in I} \Omega_i = \Omega$ となるボロノイ領域 Ω_i を生成する。このボロノイ領域内で、故障確率のような需要データは、離散点 x_i における入力値とボロノイ面積を用いて平滑化され、維持管理費用や拠点新設費用のような拠点データも、 x_i の最近傍の入力値で補間される。従って、生成される連続関数は各ボロノイ領域内で一定の値を持ち、それら

から得られる最適値 $A^*(x, t)$ も領域内で一定の値となるため、 $A^*(x, t) = A_i^*(t) \forall x \in \Omega_i \forall i, t$ が成り立つ。また本稿では、境界領域 Ω は、 X_f を内包する凸包 $\text{conv}(X_f)$ を、重心座標を中心とし、拡大率 $\sigma \geq 1$ を用いて拡大したものとす。以上の下で、離散点の入力値を用いる CA モデルは以下のように定式化される。

$$Z_C \approx \int_{\Psi} \sum_{i \in I} \gamma^i \left[p_i(t) \alpha_C(x_i, A_i(t)) + \left(\frac{C_b(j(i), t)T + h(j(i), t)}{T} \right) \frac{|\Omega_i|}{A_i(t)} \right] dt \quad (12)$$

ただし、 $j(i) = \arg \min_{j \in J} \|x_j - x_i\|$ であり、故障確率密度 $p_i(t)$ は十分に小さい単位期間長 Δt を仮定し、 $p_i(t) = P_i(t)/\Delta t$ とする。

また、 $A_i(t)$ の最適値は式 (9) と同様に式 (12) の一階の導関数より求まり、拠点配置数 $n^*(t)$ は式 (10) を以下のように書き換えて得られる。

$$n^*(t) \approx \left\lceil \sum_{i \in I} |\Omega_i| / A_i^*(t) \right\rceil \quad \forall t \quad (13)$$

(5) 等尺性埋め込みと Isomap

2.(4) で定式化した CA モデルはユークリッド空間上で定義されるため、ネットワーク距離を用いた距離空間 (以下ネットワーク空間) を扱うことができない。しかし高速道路の ETC 施設のように、ネットワーク上に存在する対象については、ネットワーク空間に対して DFLP が定式化される場合がある。そこで本稿では、Isomap アルゴリズム²⁾ を用いて、道路ネットワークを低次元ユークリッド空間へと埋め込むことで、ネットワーク空間に対して CA の適用可能範囲を拡張する。Isomap アルゴリズムについては参考文献および本文を参考にされたい。

(6) 埋め込み次元における CA の拡張

本節では、Isomap によって y 次元ユークリッド空間に埋め込まれた点集合に対して、CA を拡張する。ここでは、ETC 施設と拠点は y 次元ユークリッド空間 $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^y$ に存在、もしくは配置され、CA の最適解は連続関数 $A_y^*(x, t)$ として出力される。 $A_y^*(x, t)$ は、空間上の位置 $x \in \Omega'$ 近傍の、 x を割り当て範囲に含む拠点の領域体積の平均である。また、利用者損失は、割り当て領域の形状を y 次元超球と仮定することにより、式 (11) を以下のように書き換えて表すことができる。

$$\alpha_C^y(x, A_y(x, t)) = \int_0^{r_y(A_y(x, t))} \frac{1}{A_y(x, t)} \cdot \frac{y\pi^{\frac{y}{2}} r^{y-1}}{\Gamma(\frac{y}{2} + 1)} \alpha(r) dr \quad (14)$$

$$r_y(A_y(x, t)) = \frac{\Gamma(\frac{y}{2} + 1)^{1/y}}{\sqrt{\pi}} A_y(x, t)^{1/y} \quad (15)$$

(7) CA 解を用いた新たな MIP の定式化

上記では一般的な CA およびその拡張を示したが、それらの場合でも CA の最適解は密度関数として出力されるため、DFLP の実用的な解として用いるためには CA の最適解を離散的な拠点の位置に変換する必要

がある。本稿では CA モデルの最適解を用いた MIP の時間軸方向の計算量の削減を提案し、MIP を効率的に解くことによって離散解を導出する。MIP の効率化に当たっては、Wang et al.¹⁾ で提案されている、拠点解放時間 (本稿では拠点新設時点) による計画期間の分割を用いる。

CA によって得られた最適な拠点配置数の関数 $n^*(t)$ を用いて、最適な拠点新設時点

$$\tau_a \approx \inf_{t \geq 0} \{n^*(t) = a\} \quad (16)$$

として定める。さらに、 $n^*(0) = n_0, n^*(T) = n_T$ とすると、計画期間 Ψ は拠点新設時点によって $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, n_T - n_0 + 1\}$ 個のスキームとして離散化することができる。計画期間を新たに $\Psi' = \{\Psi_m\}$ とすると、スキーム $m \in \mathcal{M}$ は、 τ_{n_0+m-1} を開始時点とし、期間は $\Psi_m : [\tau_{n_0+m-1}, \tau_{n_0+m}]$ となる。

同一のスキーム内では時間による拠点数の変動はなく、位置の一貫性を仮定すると拠点の位置も変動しない。従ってこの期間では、MIP による最適解の決定変数は常に等しく、 $\mathbf{1}$. で定義した計画期間 \mathcal{T} と、拠点新設時点によって離散化されたスキームベースの計画期間 Ψ' で最適化をしても最適値に変化はない。以上の設定の下で、式 (1) の MIP をスキームベースの離散時間軸で書き換えると、

$$\begin{aligned} \min_{\{v'_{i,j,m}, w'_{j,m}\}} Z' &= \sum_m \sum_{t=\tau_{n_0+m-1}}^{\tau_{n_0+m}} \sum_i \sum_j \gamma^i P_i(t) \alpha(d_{i,j}) v'_{i,j,m} \\ &+ \sum_m \sum_{t=\tau_{n_0+m-1}}^{\tau_{n_0+m}} \sum_j \gamma^j C_b(j, t) w'_{j,m} \\ &+ \sum_m \sum_j \gamma^j \tau_{n_0+m-1} h(j, \tau_{n_0+m-1}) (w'_{j,m} - w'_{j,m-1}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{s.t. } v'_{i,j,m}, w'_{j,m} \in 0, 1 \quad \forall i, j, m \quad (18)$$

$$\sum_i v'_{i,j,m} = 1 \quad \forall j, m \quad (19)$$

$$v'_{i,j,m} \leq w'_{j,m} \quad \forall i, j, m \quad (20)$$

$$w'_{j,m} \leq w'_{j,m+1} \quad \forall j, m \quad (21)$$

となる。元の MIP の計画期間の時点要素数に対して、極端に拠点配置数の変動が激しい場合でない限り、この式は一般的な MIP よりも決定変数のサイズを小さくすることが可能である。

3. 実証分析

(1) 対象ネットワークと故障確率

本稿で提案した方法論の有用性と、実問題への適用可能性を検討するため、西日本高速道路株式会社関西支社管内の高速道路ネットワークを用いて実証分析を行う。対象ネットワークのノード数は 356 ノード存在し、そのうち ETC 施設が設置されているノードは 201 である。また、故障確率は 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデル⁴⁾ を用いて定義する。モデルの詳細は、本文もしくは参考文献を参照されたい。この際、ハザード関数のパラメータは、ETC 施設の実際の点検データより推定している。

表-1: ユークリッド空間における数値計算例の比較

モデル	$ J $	Z^* (百万円)	Z^* gap	Run time(s)
既存手法	90	190.5	5.98%	567.7
提案手法		201.9		11.8
既存手法	164	186.2	6.55%	1,567
提案手法		198.4		41.5
既存手法	371	182.5	7.04%	2,027
提案手法		195.4		127.7
既存手法	664	-	-	Out of memory
提案手法		193.8		282.9

表-2: ネットワーク空間における数値計算例の比較

モデル	y	Z^* (百万円)	Z^* gap	Run time(s)
既存手法	-	236.9	-	2,089
提案手法	2	255.6	7.88%	167.4
	3	254.6	7.47%	301.7

(2) 提案手法による DFLP の計算結果

実証分析は、拠点がどこにでも配置可能なユークリッド空間上の DFLP と、高速道路のノード上のみ配置可能なネットワーク空間上の DFPL の 2 パターンについて行う。また既存手法として式 (1) の MIP を直接解いた場合の計算結果も示し、提案手法との比較を行う。どちらの手法でも、計画期間 T は離散時点間の期間長を $\Delta t = 1/6$ 年とした 120 時点 ($T = 20$ 年) からなり、施設数は ETC を持つノードを対象とし $|J| = 201$ である。その他、詳しい費用設定やハザードモデルのパラメータ、計算環境は本文に記載している。

a) ユークリッド空間における DFLP の最適化

本節ではユークリッド空間上の DFLP を扱う。この時、提案手法は 2.(3),(4),(7) で示した式を用いていることに注意されたい。本空間では、拠点の配置候補点集合 J は計画空間内に連続的に存在する。従って、 J を格子点として作成し、連続空間を離散的に表現する。この時、格子点数ごとに最適解と計算負荷が異なるため、複数の格子点数について、解の比較を行う。

表-1 に、既存手法と提案手法による最適解を示す。この際、2.(4) で定義した拡大率 σ は 1.0, 1.2, 1.5, 1.7, 2.0 を設定し、提案手法の Run time は全パターンで解いた際の合計、 Z^* はその中の最適解を示している。同表により、提案手法による解が既存手法に対して、6~7% の近似精度で解を出力し、計算時間を 93%~97% 削減していることが確認できる。また、既存手法では計算困難な $|J| = 664$ でも最適解を算出できている。

b) ネットワーク空間における DFLP の最適化

本節ではネットワーク空間上の DFLP について扱う。この際、提案手法は 2.(4)~(7) の内容を用いている。表-2 には、既存手法の最適解と、Isomap を用いて次元 $y = 2$ と 3 に埋め込みを行なった際の提案手法による解を示している。ネットワーク上では、 J は全ノードの位置集合と等しく、 $|J| = 356$ となる。また、拡大率 σ は前節と同様としている。

ネットワーク空間においても同様に、提案手法は 7.5% 程度の近似精度を持ち、既存手法に対して 91% と 85%

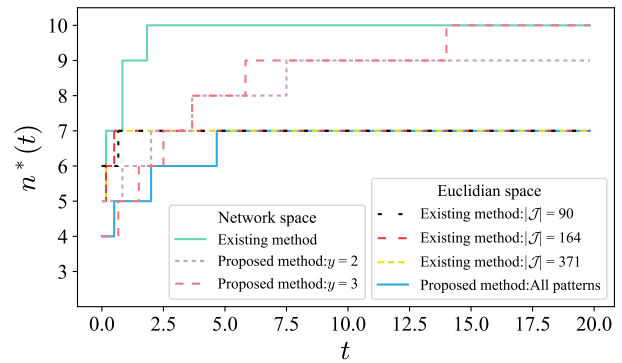


図-2: 手法と設定値ごとの施設数の動的变化

の計算時間の削減がされている。また、埋め込み次元は、次元数の大きな $y = 3$ について、より近似精度の高い解が導出できている。

c) 拠点配置数に関する考察

表-1,2 で示したそれぞれの解における、拠点配置数の変化を併せて図-2 に示す。なお既存手法は $|J| = 664$ の最適解が算出できないため記載していない。ユークリッド空間とネットワーク空間で、既存手法の最終的な拠点数は 7 および 10 と異なっており、距離関数の違いが結果に影響していることがわかる。また、提案手法はたいていの場合、既存手法の最終的な拠点配置数を再現できている。しかし、どちらの空間においても、提案手法の拠点配置数の変動時点は既存手法と比較して遅く、これは、CA の目的関数には、位置の一貫性を保証する制約がないためであると考えられる。

4. おわりに

本稿では、高速道路上の ETC 施設の故障に起因する利用者損失と、予備部品を備蓄する拠点の新設・維持管理費用を考慮した拠点の配置計画について定式化を行い、効率的な計算手法の構築をおこなった。具体的には、施設の故障確率と定量的な利用者損失の下、最適な配置計画を求める DFLP を MIP として定式化するとともに、当問題の計算困難性に対して、CA を用いた MIP の近似的解法を提案し、Isomap を用いたネットワーク埋め込みによって、CA をネットワークを対象とした問題に適用可能にした。

今後の検討課題は、提案手法の近似精度の向上である。具体的には拡大率の効率的な探索手法の開発と、CA の目的関数への位置の一貫性の制約の導入が考えられる。

参考文献

- 1) Wang, X., Lim, M. and Ouyang, Y.: A continuum approximation approach to the dynamic facility location problem in a growing market, *Transportation Science*, Vol.51, No.1, pp.343-357, 2017.
- 2) Tenenbaum, J.B., Silva, V. D. and Langford, J.C.: A Global Geometric Framework for Nonlinear Dimensionality Reduction, *Science*, Vol. 290, Issue 5500, pp.2319-2323, 2000.
- 3) Peng, F., Ouyang, Y. and Wang, X.: Approximation of discrete spatial data for continuous facility location design, *Integrated Computer-Aided Engineering*, Vol.21, Issue 4, pp.311-320, 2014.
- 4) 小林潔司, 水谷大二郎, 松島格也, 山本浩司, 貝戸清之, 坂口創: 2次元混合ワイプル劣化ハザードモデル, 土木学会論文集 F4 (建設マネジメント), Vol.72, No.2, pp.47-62, 2016.