

# 鉄道時差出勤の社会的便益と導入インセンティブに関する分析

奥村 誠<sup>1</sup>・小林潔司<sup>2</sup>・田中成興<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 広島大学助教授 工学部建設系 (〒 739-8527 東広島市鏡山 1-4-1)

<sup>2</sup>正会員 工博 京都大学教授 大学院工学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

<sup>3</sup>京都大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

時差出勤は交通混雑緩和政策として期待されているが、企業にとっては関連企業との労働時間帯のずれを招くという問題がある。このような労働時間の分散化に伴う外部不経済性の発生が時差出勤の普及を妨げている。本研究は企業の始業時刻の決定行動を内生化したような通勤輸送市場の均衡モデルを提案する。さらに、始業時刻分布に複数均衡解が存在し、始業時刻が効率性の低い均衡解にロックインされる可能性について分析する。

**Key Words :** *staggered work hours, railway commuting, temporal agglomeration economy, congestion diseconomy*

## 1. はじめに

時差出勤施策は、交通需要の時刻的な分散化を図り、ピーク時の交通量を抑制する施策として有望視されている。社会的実験により時差出勤が渋滞緩和に有効であることを報告した事例がいくつか存在する<sup>1)2)</sup>。一方、時差出勤が業務効率の低下をもたらす可能性も報告されている。現実には、時差出勤施策が十分浸透しているとは言えないのが実状である。

企業は、情報や知識の交換、商取引の容易さを求めて都市に集積する。このような集積の経済は、時間軸上においても発生する。業務上のコンタクトを直接行う必要が生じた場合、業務時間が互いに一致していれば、コミュニケーションの効率性は増加する。互いに業務時間を一致させることにより「時間的集積の経済性」が働くことになる<sup>3)</sup>。時差出勤制度の導入は、勤務時間の分散化による外部不経済を生み出す可能性がある。

一方、家計は交通機関の混雑や出発時刻のスケジュール費用を考慮して、効用を最大にするように出勤時刻を選択する。しかし、家計は自己の行動が混雑に及ぼす影響を考慮せずに、私的費用のみに基づいて出発時刻を選択する。この場合、市場均衡として実現する出発時刻分布が社会的に最適になる保証はない。望ましい通勤需要の管理政策を立案するためには、通勤混雑と勤務時間の分散化により生じる外部不経済の発生を可能な限り抑制しうる鉄道輸送パターン、時差出勤パターンを求めることが必要となる。

本研究では、鉄道企業、家計、一般企業の行動の相互関係に着目したような鉄道通勤市場均衡モデルを提

案する。さらに、市場均衡の効率性について検討し、望ましい通勤需要管理の管理方策について考察する。以下、2. では、本研究の基本的な考え方を述べる。3. では市場均衡モデルを定式化する。4. では、市場均衡の特性を理論的に分析し、5. では数値計算事例を示す。なお、議論の見通しをよくするために、煩雑な数学的展開はすべて付録にとりまとめ、本文中では定性的な議論を中心に示すこととする。

## 2. 本研究の基本的な考え方

### (1) 既存の研究概要

Vickrey は、その先駆的な研究の中でボトルネックを有する単一リンクを対象として、通勤時刻の選択問題を定式化した<sup>4)</sup>。さらに、Henderson はより一般的な通勤時刻選択行動モデルを提案し、時間的集積の経済性に対する依存度により、出勤時刻の分布が異なることを示した<sup>5)6)</sup>。その後、ボトルネックを有する単一リンクを対象として、出発時刻の分布に関する研究が蓄積されている<sup>7)8)9)</sup>。これら確定的な出発時刻分布モデルに対して、旅行時間とスケジュール遅れのトレードオフ<sup>10)</sup>に着目したような不確実性下での出発時刻選択に関する研究も蓄積されている。経路選択モデルと出発時刻の選択を総合したような確率論的均衡モデルも提案されている<sup>11)</sup>。最近、文らは固定始業時刻制度の企業とフレックス制度の企業の利潤を比較し、フレックス制度導入の可能性について分析している<sup>12)</sup>。さらに、時間的集積の経済が存在する場合、効率性の悪い均衡解にロックインされる可能性があることを数値計算を

通じて指摘している。時間的集積の経済性と複数均衡解の存在に着目する点において、本研究と問題意識が一致している。上述した研究は、いずれも道路で生じる混雑現象を対象としたものであり、大都市圏の主たる通勤手段である鉄道システムには適用できない。一方、筆者らは家計と鉄道企業の両者の行動を明示的に考慮した均衡論的モデルを開発し<sup>13)14)</sup>、家計の効用最大化行動の結果として実現する出発時刻分布がパレート最適ではなく、通勤混雑という外部不経済を内部化するための交通需要管理施策が必要であることを指摘した。しかし、企業の始業時刻の選択行動は考慮されていない。本研究では、時間的集積の経済性と混雑という外部不経済性が働く環境の下で、企業の始業時刻と家計の出勤時刻分布を同時に考慮しうる市場均衡モデルを提案する。

## (2) 時差出勤導入のインセンティブ

企業の始業時刻は企業自身が決定したものである。特に、生産における時間集積の経済性が働く場合、他の企業とは異なる始業時刻を設定すれば生産性が低下し、結果的に利潤の減少を招く。企業が利潤最大化行動を採用する限り、時差出勤制度を導入する直接的なインセンティブは存在しない。しかし、現実にはいくらかの企業が時差出勤制度の導入を試みているのも事実である。企業が時差出勤制度を導入するインセンティブとして、労働市場における競争原理が考えられる<sup>12)</sup>。いま、家計は各企業が提供する賃金率と通勤不効用の双方を同時に考慮しながら、効用が最大となるような企業を選択すると考える。一方、企業が時差出勤を導入し始業時刻を変更すれば、生産性の低下を招き賃金水準は低下する。しかし、始業時刻の変更により通勤の不効用が緩和され、以前よりも安い賃金でも雇用を確保できる可能性があれば、企業は始業時刻を変更する誘因を持つだろう。特に、企業が完全競争的に始業時刻、雇用者数を決定する場合、長期的には企業がいずれの始業時刻を選択しても正の利潤を獲得できないような均衡に到達する。このような家計の効用最大化行動と企業の利潤最大化行動の結果、長期的には(時差出勤が実現するとすれば)どのタイプの企業を選択しても同一の効用水準を達成できるような均衡状態に到達するだろう。本研究では、異なる始業時刻を有する企業の間で、家計が等しい効用水準を達成しうるような状況を市場均衡として記述することとする。

## (3) 市場均衡モデルの基本構造

鉄道による通勤輸送問題に関わる主体として、1) 鉄道企業、2) 家計、3) 一般企業、及び4) 政府が挙げられる。本研究では、家計が勤務する企業を、鉄道企業と

区別するために一般企業と呼ぶ。鉄道企業への通勤は考えない。鉄道通勤サービス市場では、異なった時刻の通勤需要に対して、異なる輸送サービスが供給される。各時刻における通勤需要量と輸送サービス量により、通勤列車の混雑度が決定される。このように通勤サービス市場は時間的に差別化された市場を形成している。家計は、一般企業が指定した始業時刻を念頭に置き、鉄道企業が供給する輸送力に対して、各自の効用を最大にするように出勤時刻を選択する。一方、鉄道企業は、通勤輸送サービス市場を地域的に独占しており、政府により管理された輸送計画に従って通勤輸送サービスを提供する。家計は一般企業の指定した始業時刻から一定時間に亘って労働を提供する。企業の生産性は、都市内の関連企業との連絡や交渉の便利さに代表されるような時間的集積の経済性の影響を受ける。一般企業は、利潤を最大にするように始業時刻と雇用者数を決定する。

## 3. 市場均衡モデルの定式化

### (1) モデル化の前提

ベッドタウンと都心からなる1つの都市を考える。すべての家計は、ベッドタウンに住み、両地域を結び鉄道を用いて都心に通勤する。記述の簡略化のために通勤需要を1に正規化する。鉄道企業の運賃は平均費用価格に設定されている。一般企業は、通勤者のみを生産要素とし、生産された財を都市内で販売する。企業は利潤が最大になるように始業時刻を決定する。企業は労働力のみを生産要素とする線形の生産技術を持ち、他企業との業務時間の重なりが大きいほど労働生産性が高くなるという時間的集積の経済が働く。企業は始業時刻を選択することにより間接的に時間的集積の経済効果を制御できる。企業の労働時間の長さ  $H$  は一定である。始業時刻として  $T_a, T_b$  という2つの時刻が利用可能である。 $T_b - T_a := \tau (> 0)$  と仮定する。時刻  $T_k$  ( $k = a, b$ ) に始業時刻を設定した企業の従業員は、すべて時刻  $T_k + H$  に終業する。家計の遅刻や早退は許されず、始業時刻  $T_k$  までに出社し、終業時刻  $T_k + H$  以降に退社しなければならない。通勤所要時間はすべての家計にとって一定である。

### (2) 家計行動の定式化

家計を始業時刻  $T_k$  ( $k = a, b$ ) により2つのタイプ ( $k = a, b$ ) に分類する。始業時刻  $T_a$  の一般企業に勤務する家計数を  $r$  ( $1 \geq r \geq 0$ ) とする。家計は企業が定めた始業時刻、終業時刻制約を満足する範囲の中で、出社時刻(勤務先に到着する時刻)  $t_k$ 、及び退社時刻(帰宅を開始する時刻)  $q_k$  を自由に決定できる。当該の家

計の間接効用関数を準線形効用関数

$$\begin{aligned} \psi_k(w_k, t_k, q_k) &= Y_k - R - U_k(t_k) - V_k(q_k) \quad (1) \\ U_k(t_k) &= s(t_k)^\eta + c(T_k - t_k) \\ V_k(q_k) &= s(q_k)^\eta + c\{q_k - (T_k + H)\} \end{aligned}$$

により定義する。ここに、 $Y_k$ は家計所得、 $U_k(t_k)$ 、 $V_k(t_k)$ はそれぞれ時刻  $t_k$ に出社するタイプ  $k$ の家計の出勤不効用、帰宅不効用を表している。 $R$ は一日あたりの鉄道運賃であり、時刻によらず一定である。 $s(t_k)$ は時刻  $t_k$ に都心に到着する列車の乗車密度、 $s(q_k)$ は時刻  $q_k$ に都心を出発する列車の乗車密度で、いずれも物理的(制度的)制約  $s$ を越えない正数である。 $c > 0$ は単位時間当たりのスケジュール調整費用である。出勤時と帰宅時のスケジュール調整費用に差異を設けても問題の構造に本質的な影響を及ぼさない。以下では出勤時と帰宅時のスケジュール調整費用が同一であると仮定して議論を進める。以上のモデルにおいて、始業時刻  $T_k$ の各家計は、自らの効用を最大にするように出社時刻  $t_k$ を  $t_k \leq T_k$ の範囲で、退社時刻  $q_k$ を  $T_k + H \leq q_k$ の範囲で自由に選択する。仮定より、すべての家計にとって実通勤所要時間が同一であるため、式(1)では記述の簡略化のため実通勤所要時間に関わる不効用項を省略している。すなわち、家計のスケジュール費用は、出社時刻と始業時刻、及び終業時刻と退社時刻の間における時間調整に関わる時間費用のみで構成される。さらに、効用関数(1)は時刻に依存していない。このことは、例えば夏時間が採用されすべての家計の始業時刻が同時に変化しても家計の効用は変化しないことを意味している。なお、出社時刻分布と同様に帰宅時刻の分布を導出できるので、当面の間、出社時刻分布のみに着目して議論を進める。

家計は始業時刻を与件として効用を最大にするように出社時刻を選択する。このような家計の効用最大化行動の結果、最終的には通勤が行われる時間帯ではどの出社時刻を選択しても効用が一定になるような均衡状態に到達するだろう。均衡状態では裁定条件

$$\left. \begin{aligned} U_k(t_k) &= \bar{U}_k \quad \text{if } s(t_k) > 0 \\ U_k(t_k) &\geq \bar{U}_k, \quad \text{if } s(t_k) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

が成立する。ここで、 $\bar{U}_k$  ( $k = a, b$ )は、始業時刻が  $T_k$  ( $k = a, b$ )の家計の出勤に関わる部分不効用である。いま、 $s(t_k) > 0$ が成立する任意の時刻  $t_k$ において

$$\frac{dU_k(t_k)}{dt_k} = 0 \quad (3)$$

が成立する。この式より、微分方程式

$$\dot{s}(t_k) = \frac{c}{\eta s(t_k)^{\eta-1}} \quad t_k \in (T_k, T_k] \quad (4)$$

を得る。ただし、 $\dot{s}(t_k) = ds(t_k)/dt_k$ 、 $T_k$ はタイプ  $k$ の家計の出社が始まる最早時刻である。ここで、タイプ  $b$ の出社時刻分布に関して2種類の安定均衡が存在す

ることに着目しよう<sup>14)</sup>。すなわち、1)  $T_b \geq T_a$ 、2)  $T_b < T_a$ の場合である。1)の場合には、タイプ  $a$ の家計の出社が終了した後に、タイプ  $b$ の家計が出社を開始する。2)では時点  $T_a$ より以前にタイプ  $a$ とタイプ  $b$ の家計がともに出社を開始する。この場合、両タイプの家計は同一の列車に乗車することとなり、

$$s(t_a) = s(t_b) \quad \text{for } t_a = t_b \in (T_a, T_a) \quad (5)$$

が成立する。 $T_a$ はタイプ  $a$ の家計の出社が開始される時刻である。区間  $(T_a, T_a)$ の各時点では、通勤者の総和の出社時刻分布は求まるが、各タイプごとの出社割合は一意的には決まらない。さらに、区間  $(T_a, T_a)$ において両タイプの家計がともに通勤するため  $T_b = T_a$ が成立する。なお、タイプ  $b$ の家計の出社時刻に対する裁定条件より、ケース2)の場合には、 $s(T_a^-) = s(T_a^+)$ が成立する。ただし、 $s(T_a^-) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} s(T_a - \Delta t)$ 、 $s(T_a^+) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} s(T_a + \Delta t)$ である。もし  $s(T_a^-) < s(T_a^+)$ が成り立っているとすると、タイプ  $b$ の家計は時刻  $T_a$ 以前に出社を行えば効用を増大することができるため、このような状態は生じない。式(5)を考慮し、表記の簡便化のため時刻  $t_k$ の添字を省略する。どちらのケースにおいても、安定的な均衡条件は

$$\dot{s}(t) = \frac{c}{\eta s(t)^{\eta-1}} \quad t \in (T_a, T_a) \cup (T_b, T_b) \quad (6)$$

$$s(T_a^-) \geq s(T_a^+) \quad (7)$$

$$s(t) \geq 0 \quad t \in (T_a, T_b] \quad (8)$$

と表現できる。実際の列車の乗車密度には物理的な制約から上限が存在する。しかし、乗車密度の制約は出社時刻分布に影響を与えるものの、本研究における考察事項には本質的な影響を与えない。従って、本研究では計算の煩雑さを避けるために乗車密度の制約が有効でない場合を想定して議論を進めることとする。

### (3) 鉄道企業の行動

鉄道企業は独立採算制度の下で活動を行う公企業であり、所与の始業時刻別通勤需要の下で家計の通勤不効用の総和を最小にするように通勤輸送を行う。タイプ  $a$ の通勤需要  $r$ とタイプ  $b$ の通勤需要  $1-r$ を与件とする。時刻  $t$ に都心に出社する家計に対して供給される輸送力を  $u(t) \geq 0$ と表す。輸送力は、車両定員・編成車両数・列車運行頻度の積で表される。高密度で運行されている路線を想定し、輸送力を時間軸上の連続関数として扱う。仮定より、総通勤需要は1に基準化されている。時刻  $t$ までに都心に出社した累積家計数のうち、始業時刻を迎えていない家計数を  $M(t)$  ( $1 \geq M(t) \geq 0$ )と表す。いま、家計の出社時刻を2つの区間1)  $[T_a, T_a)$ 、2)  $(T_a, T_b]$ に分割する。この時、

$$\dot{M}(t) = s(t)u(t) \quad \text{except } t = T_a \quad (9)$$

が成立する。ただし、 $\dot{M}(t) = dM(t)/dt$  である。時点  $T_a$  においては  $r$  人が始業するので、

$$M(T_a^-) - M(T_a^+) = r \quad (10)$$

が成立する。本研究では、通勤輸送の短期的なマネジメント問題を考えており、鉄道企業の線路容量の決定問題は考えない。歴史的な経緯により線路容量はすでに決定されており、鉄道企業の固定費は一定である。鉄道企業の固定費は旅客運賃の中に含まれる。本研究では通勤需要が一定であると考えており、家計が固定費用に関して一定額の負担を行うことを想定している。以下、記述の簡便化のために、鉄道企業の固定費用とそれに相当する運賃部分に関する記述を省略する。したがって、式 (1) における運賃  $R$  は変動費用に関わる運賃のみを表している。鉄道企業の短期的な輸送費用を各時点ごとにかかる変動費用を積み上げて記述しよう。瞬間的費用関数として、各時点の輸送力  $u(t)$  に対する弾性値一定の関数

$$u(t)^\xi \quad (11)$$

を考える。ここで、 $\xi (> 1)$  は費用関数の弾性値である。短期的輸送費用を次式で定義する。

$$TC = \int_{T_a^-}^{T_a^+} u(t)^\xi dt + \int_{T_a^+}^{T_b} u(t)^\xi dt \quad (12)$$

この時、鉄道企業の行動は以下のように記述される。

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} & \left[ -\{rs(T_a^-)^n + (1-r)s(T_b)^n\} \right. \\ & \left. - \int_{T_a^-}^{T_a^+} u(t)^\xi dt - \int_{T_a^+}^{T_b} u(t)^\xi dt \right] \quad (13a) \end{aligned}$$

subject to

$$\dot{s}(t) = \frac{c}{\eta s(t)^{\eta-1}}, \quad t \in (T_a, T_a) \cup (T_a, T_b) \quad (13b)$$

$$\dot{M}(t) = s(t)u(t), \quad t \in (T_a, T_a) \cup (T_a, T_b) \quad (13c)$$

$$s(T_a^-) \geq s(T_a^+) \quad (13d)$$

$$M(T_a^-) = 0 \quad (13e)$$

$$M(T_a^-) - M(T_a^+) = r \quad (13f)$$

$$M(T_b) = 1 - r \quad (13g)$$

$$s(t) \geq 0 \quad (13h)$$

$$M(t) \geq 0 \quad (13i)$$

$$u(t) \geq 0 \quad (13j)$$

以上の最適制御問題は状態変数にジャンプが存在する最適制御問題になっている<sup>16)17)</sup>。この問題の最適制御は解析的に求まる(付録 I 参照)。

以上では出勤トリップの輸送を考えていたが、帰宅トリップに関しても同様に鉄道企業の行動モデルを定式化できる。いま、運賃水準が出勤時刻に依存せず、総運賃収入が総可変費用に等しくなる水準に設定されると考える。出勤及び帰宅トリップの双方に関する市場

均衡解を求めることにより、タイプ  $k$  の企業に勤務する家計の通勤交通に関わる部分不効用を求めることができる。以上の最適制御問題の解に関しては 4.(1) で改めて考察する。

#### (4) 一般企業の行動

都市内の企業の投入資源は労働力のみであり、同質の生産技術を持つと仮定しよう。いま、各時刻の雇用者 1 人当たりの労働生産性はその時刻に都市内で業務に従事している労働力  $n(t)$  に依存すると考えよう。いま、時刻  $t$  における瞬間的な労働生産性を  $n(t)^\alpha$  とすれば、タイプ  $k$  の企業の瞬間的な生産量  $f_k(t, r)$  は

$$f_a(t, r) = n(t)^\alpha r \quad (14)$$

$$f_b(t, r) = n(t)^\alpha (1-r) \quad (15)$$

と記述できる。ここで、 $r$  はタイプ  $a$  の企業に勤務する家計数、 $n(t)$  ( $1 \geq n(t) \geq 0$ ) はその瞬間に都市で業務を行っている家計数、 $\alpha \geq 0$  は時間的集積の経済性を表現するパラメータである。労働生産性は  $n(t) = 1$  の時に最大の値をとる。 $\alpha$  が大きくなるほど、始業時刻の分散化による非効率性の程度はより大きくなる。一日の生産量  $F_k(r)$  は、式 (14),(15) を始業時刻から終業時刻まで積分したものととなる。

$$F_a(r) = r \int_{T_a}^{T_a+H} n(t)^\alpha dt \quad (16)$$

$$F_b(r) = (1-r) \int_{T_b}^{T_b+H} n(t)^\alpha dt \quad (17)$$

生産物をニューメレール財とする。一般企業は利益をすべて家計に賃金として配当する。すなわち、タイプ  $k$  の家計 1 人当たりの賃金所得  $Y_k$  は

$$Y_k = \int_{T_k}^{T_k+H} n(t)^\alpha dt \quad (18)$$

となる。すべての家計の業務時間の長さが  $H$  に等しいことに注意すれば、

$$\left. \begin{aligned} n(t) &= r, & t &\in (T_a, T_b) \\ n(t) &= 1, & t &\in [T_b, T_a + H] \\ n(t) &= 1 - r, & t &\in (T_a + H, T_b + H) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

が成立する。したがって式 (16) に含まれる積分項は、

$$\int_{T_a}^{T_a+H} n(t)^\alpha dt = H - (1-r^\alpha)\tau$$

$$\int_{T_b}^{T_b+H} n(t)^\alpha dt = H - (1-(1-r)^\alpha)\tau$$

となる。この時、各タイプの家計が獲得する賃金所得は

$$Y_a(r) = H - (1-r^\alpha)\tau \quad (20a)$$

$$Y_b(r) = H - \{1 - (1-r)^\alpha\}\tau \quad (20b)$$

と表せる。

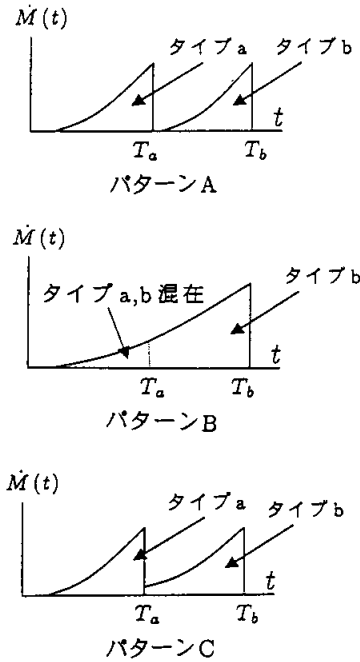


図-1 出社時刻の分布パターン

(5) 市場均衡

任意の  $r$  に対して最適制御問題 (13a)-(13j) を解くことができる。この問題の最適解を求めることにより、タイプ  $k = a, b$  の家計の間接効用関数を  $r$  の関数

$$\psi_k(r) = Y_k(r) - R(r) - \Phi_k(r) \quad (21)$$

として表現できる。ただし、 $\Phi_k(r) = U_k(r) + V_k(r)$  は家計の通勤不効用、 $R(r)$  は運賃である。家計は効用を最大にするようタイプの企業を選択することより、長期的な均衡状態では次式が成立する。

$$r = r^* \quad \text{if} \quad \psi_a(r) = \psi_b(r) \quad (22a)$$

$$r = 0 \quad \text{if} \quad \psi_a(0) < \psi_b(0) \quad (22b)$$

$$r = 1 \quad \text{if} \quad \psi_a(1) > \psi_b(1) \quad (22c)$$

なお、式 (22a)-(22c) は市場均衡の必要条件であり、これらの条件を満足する解が安定的な均衡解である保証はない。市場均衡解の安定性に関しては4.(3) で検討する。式 (22a) を満足するような安定的な均衡解  $r$  ( $1 > r > 0$ ) が存在する場合、時差出勤が実現することとなる。なお、4.(2) で議論するように間接効用関数は  $r$  に関して区分連続的な関数であり、間接効用関数が不連続的に jump する点が安定的な市場均衡になる場合がある。この種の安定均衡解に関しては、のちに4.(3) で議論する。ここでは、式 (22a)-(22c) 以外に、不連続点において市場均衡解が存在する可能性があることのみ指摘しておく。

表-1 通勤パターンの分類

a	$\Pi^* > \Pi > 0$	出勤時	帰宅時
a-1	$\Pi^{\frac{1}{\rho}} \geq r \geq 0$	C	A
a-2	$r^{00} > r > \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	C	B
a-3	$r^{00} \geq r \geq r^{00}$	C	C
a-4	$1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}} > r > r^{00}$	B	C
a-5	$1 \geq r \geq 1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	A	C
b	$\Pi^{**} \geq \Pi > \Pi^*$	出勤時	帰宅時
b-1	$\Pi^{\frac{1}{\rho}} \geq r \geq 0$	C	A
b-2	$r^{00} \geq r > \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	C	B
b-3	$r^{00} > r > r^{00}$	B	B
b-4	$1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}} > r \geq r^{00}$	B	C
b-5	$1 \geq r \geq 1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	A	C
c	$0.5^{\rho} \geq \Pi > \Pi^{**}$	出勤時	帰宅時
c-1	$r^{00} \geq r \geq 0$	C	A
c-2	$\Pi^{\frac{1}{\rho}} \geq r > r^{00}$	B	A
c-3	$1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}} > r > \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	B	B
c-4	$r^{00} > r \geq 1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	A	B
c-5	$1 \geq r \geq r^{00}$	A	C
d	$1 \geq \Pi > 0.5^{\rho}$	出勤時	帰宅時
d-1	$r^{00} \geq r \geq 0$	C	A
d-2	$1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}} > r > r^{00}$	B	A
d-3	$\Pi^{\frac{1}{\rho}} \geq r \geq 1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	A	A
d-4	$r^{00} > r > \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	A	B
d-5	$1 \geq r \geq r^{00}$	A	C
e	$\Pi > 1$	出勤時	帰宅時
e	$1 \geq r \geq 0$	A	A

注) 第2列は各ケースが成立するための条件を表す。表中の記号は、 $\theta = \xi - 1$ ,  $\iota = \eta\theta / (1 + \theta + \eta\theta)$ ,  $\rho = \frac{\theta \iota}{\theta + \iota}$ ,  $\Pi = cr(\frac{\iota}{\theta})^{\frac{1}{1+\rho}}$ ,  $\Pi^*$  は  $r^{00} = 0.5$  を満足する  $\Pi$ ,  $\Pi^{**}$  は  $r^{00} = \Pi^{\frac{1}{\rho}}$  を満足する  $\Pi$ , 記号 A, B, C はそれぞれ図-1に示す通勤パターンと対応している (導出過程は付録 I 参照)。また、 $r^{00}, r^{00}$  は間接効用が不連続に変化する点であり、詳細は4.(2)を参照のこと。

4. 市場均衡解の特性

(1) 通勤パターンの類型

時刻  $T_a$  に始業する企業の占める割合  $r$  を固定すれば、最適制御問題 (13a)-(13j) を解くことができる。この場合、最適制御問題の解として求まる家計の出社時刻分布  $M(t)$  は図-1に示すように A) タイプ a, b の出社時刻が分離する場合 (パターン A), B) タイプ a の出社の終了直後、タイプ b の出社が始まる場合 (パターン B), C) 両タイプが混在して出社する時間帯がある場合 (パターン C), の3通りのパターンのいずれかになる (付録 I 参照)。退社時刻分布に関しても、時間軸を反対にとれば図-1と同様のパターンに分類できる。いずれのパターンが求まるかは、比率  $r$  と外生パラメータ  $c, \tau, \xi, \eta$  の値に依存する。表-1には、外生パラメータと比率  $r$  の相対的な大小関係に応じてどのような通

勤パターンが現れるかを網羅的に分類している（付録 I 参照）。

## (2) 間接効用関数の性質

式 (21) における  $\Phi_k(r), R(r)$  は、表-1 に示す各パターンと対応して異なった関数形で表現される。付表-1 に通勤不効用関数  $\Phi_k(r)$  及び運賃関数  $R(r)$  を具体的に示している。また、通勤不効用関数の性質に関する数学的議論は付録 II に示している。式 (20a), (20b) より、 $Y_a(r)$  は  $r$  に関して連続な単調増加関数であり  $Y_a(r) = Y_b(1-r)$  ( $1 \geq r \geq 0$ ) が成立する。図-2 は、例として  $Y_k(r), R(r), \Phi_k(r)$  ( $k = a, b$ ) を示したものである（パラメータ値は数値計算事例の事例 2）と同様。この図に示すように、 $\Phi_a(r)$  は点  $r^\circ$  および  $r^{\circ\circ}$  において 2 回ジャンプする区分的に連続かつ非減少な関数である ( $r^\circ, r^{\circ\circ}$  については付録 I 参照)。逆に、 $\Phi_b(r)$  は  $r^\circ, r^{\circ\circ}$  で 2 回ジャンプする区分的に連続かつ非増加な関数である。関数  $\Phi_a(r), \Phi_b(r)$  の間には  $\Phi_a(r) = \Phi_b(1-r)$  が成立する。一方、 $R(r)$  は、 $r^\circ, r^{\circ\circ}$  において 2 回ジャンプする。運賃は  $r$  に関して複雑な変化をみせるものの  $r = 0.5$  を軸として左右対称であり  $R(r) = R(1-r)$  が成立する。均一料金の仮定より、両タイプの家計の運賃は常に同じ値をとる。したがって、市場均衡は運賃に依存せず  $\Phi_k(r), Y_k(r)$  に依存して決定される。また、 $\Phi_a(r)$  と  $\Phi_b(r)$ 、及び  $Y_a(r)$  と  $Y_b(r)$  は互いに  $r = 0.5$  を軸として折り返した形状をしており  $\psi_a(r) = \psi_b(1-r)$  が成立する。すなわち、各タイプの間接効用関数は  $r = 0.5$  を境に互いに対称的な形をしている。以上で述べた特性は、例としてとりあげた図-2 だけでなく、すべてのケースにおいて成立する事項である。各タイプの間接効用の格差は  $Y_k(r) - \Phi_k(r)$  の大小関係のみに依存しているため、均衡解のパターンを分析するために新しい関数  $\Psi_k(r) = Y_k(r) - \Phi_k(r)$  を定義する。

## (3) 市場均衡解のパターン

関数  $Y_a(r), Y_b(r)$  がそれぞれ単調増加、単調減少関数であり、 $\Phi_a(r)$  は非減少な区分連続関数、 $\Phi_b(r)$  は非増加な区分連続関数である。 $\Psi_a(r) = \Psi_b(1-r)$  より、 $\Psi_a(r), \Psi_b(r)$  は  $r = 0.5$  を軸として互いに対称である。そこで、一般性を損なうことなく区間  $[0, 0.5]$  に着目しよう。いま、式 (20a), (20b) より  $Y_a(0) < Y_b(0)$  が成立する。また、すべてのケースにおいて  $\Phi_a(0) < \Phi_b(0)$  が保証される（付表-1 参照）。ゆえに、 $r = 0$  において、

$$\zeta < (1-c)\tau \quad (\Psi_a(0) < \Psi_b(0)) \quad (23)$$

$$\zeta \geq (1-c)\tau \quad (\Psi_a(0) \geq \Psi_b(0)) \quad (24)$$

の 2 通りの場合が起こりうる（付録 II 参照）。式 (23) が成立する場合、任意の  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  に対して  $\Psi_a(0 + \varepsilon) <$

$\Psi_b(0 + \varepsilon)$ 、 $\Psi_a(1 - \varepsilon) > \Psi_b(1 - \varepsilon)$  が成立するような  $\varepsilon$  が存在する。したがって、 $r$  が  $r = 0$  (あるいは  $r = 1$ ) より微小に乖離しても  $r$  は  $r = 0$  (あるいは  $r = 1$ ) に向かって収束するように挙動するため、点  $r = \{0, 1\}$  は局所的に安定的な均衡解である。これらの均衡解では、すべての企業が同一の始業時刻を選択しており、一斉始業均衡と呼ぶ。一方、式 (24) が成立する場合、 $r = \{0, 1\}$  は均衡解とはならない。式 (23) は付録 III に示すように、 $\tau$  が十分大きい場合には必ず成立する。

**特性 1** 式 (23) が成立する場合、一斉始業均衡は局所的に安定的な均衡解となる。

関数  $\Psi_k(r)$  の対称性より  $r = 0.5$  において  $\Psi_a(r), \Psi_b(r)$  は必ず一度交差する。区間  $(0, 0.5)$  の間で、 $\Psi_a(r)$  と  $\Psi_b(r)$  が交差する場合と交差しない場合が起こりうる。 $\Psi_a(\hat{r}) = \Psi_b(\hat{r})$  が成立する  $\hat{r} \in (0, 0.5]$  が局所的に強安定的な均衡解であるためには、 $\hat{r}$  の近傍で任意の  $\varepsilon > \varepsilon > 0$  に対して  $\Psi_a(\hat{r} + \varepsilon) < \Psi_b(\hat{r} + \varepsilon)$ 、 $\Psi_a(\hat{r} - \varepsilon) > \Psi_b(\hat{r} - \varepsilon)$  となる  $\varepsilon$  が存在しなければならない。この条件は、

$$\frac{d\Psi_a(\hat{r})}{dr} < \frac{d\Psi_b(\hat{r})}{dr} \quad (25)$$

により表される<sup>18)</sup>。一方、条件

$$\frac{d\Psi_a(\hat{r})}{dr} \geq \frac{d\Psi_b(\hat{r})}{dr} \quad (26)$$

が成立する場合、点  $\hat{r}$  は不安定均衡解である。 $r = 0.5$  は式 (25) を満足するならば安定均衡解となる。この条件は  $\alpha$  が十分に小さい場合に成立する。

**特性 2** 条件 (23) 及び  $r = 0.5$  において条件 (25) が成立する場合、一斉始業均衡と時差始業均衡 ( $r = 0.5$ ) は安定均衡解となる。

$\tau$  を十分に小さくとれば付録 III より、条件 (24) 及び  $r = 0.5$  において条件 (25) が成立する。また、 $\Psi_a(r)$  と  $\Psi_b(r)$  が区間  $(0, 0.5)$  の間で 1 度も交差しない場合には  $r = 0.5$  では条件 (26) が成立して不安定均衡となる。

**特性 3** 条件 (24) 及び  $r = 0.5$  において条件 (25) が成立する場合、一斉始業均衡は不安定であるが、時差始業均衡 ( $r = 0.5$ ) は安定均衡解となる。

以上、 $r = \{0, 0.5, 1\}$  における均衡解の安定性を検討した結果を表-2 に整理している。第 1 列は表-1 に示す均衡解のパターンと対応している。同表は各 Case において 3 つの解が安定均衡解となる条件を示している。なお、パラメータ値によっては  $\Psi_a(r)$  と  $\Psi_b(r)$  が区間  $(0, 0.5)$  の間で交差する場合がある。このとき、式 (25) を満足し  $\Psi_a(\hat{r}) = \Psi_b(\hat{r})$  が成立している  $\hat{r} \in (0, 0.5)$ 、あるいは任意の微小な  $\varepsilon (> 0)$  に対して  $\Psi_a(r^\circ - \varepsilon) > \Psi_b(r^\circ - \varepsilon)$ 、 $\Psi_a(r^\circ + \varepsilon) < \Psi_b(r^\circ + \varepsilon)$  が成立するような  $r^\circ$  (あるいは  $r^{\circ\circ}$ ) は安定的な均衡点である。このような安定的な均衡解の存在を解析的に求めることは不可能であり数値計算に頼らざるを得ない。

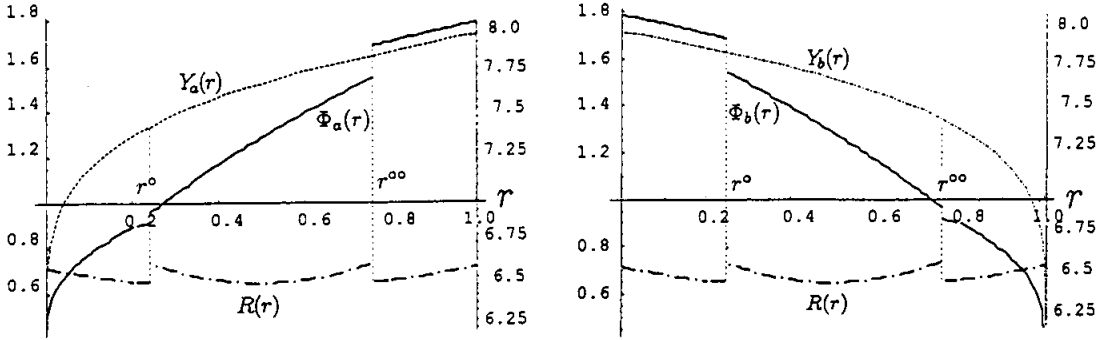


図-2 間接効用関数の形状

注) パラメータ値を $\eta = 3.0, \xi = 1.8, c = 0.38, H = 8.0, \tau = 1.7, \alpha = 0.32$ と設定した場合の計算結果を示している。

表-2  $r = \{0, 0.5, 1\}$  の均衡解の安定性

Case	安定均衡解のパターン		
a	-	$r = \{0, 1\}(P_2)$	-
b	$r = 0.5(P_1)$	$r = \{0, 1\}(P_2)$	$r = \{0, 0.5, 1\}(P_3)$
c	$r = 0.5(P_1)$	$r = \{0, 1\}(P_2)$	$r = \{0, 0.5, 1\}(P_3)$
d	$r = 0.5(P_1)$	$r = \{0, 1\}(P_2)$	$r = \{0, 0.5, 1\}(P_3)$
e	$r = 0.5(P_1)$	$r = \{0, 1\}(P_2)$	-

注)  $P_1$ - $P_3$ は安定均衡解が存在するための必要条件であり、 $P_1$ :式(24),(25),  $P_2$ :式(23),(26),  $P_3$ :式(23),(25)である。詳細な条件は付録IIIの通りであり、これらに各Caseが成立する条件が付加される。

(4) 市場均衡解と社会的厚生

本モデルでは鉄道企業・一般企業ともに利潤は0である。通勤需要は運賃に対して非弾力的であり、鉄道企業の固定費用は運賃により回収される。一般企業の利益はすべて雇用者に配分される。この場合、社会的厚生は総効用に一致する。いま、安定的な市場均衡解  $r^*$  における社会的厚生は

$$SW(r^*) = r^* \psi_a(r^*) + (1 - r^*) \psi_b(r^*) \quad (27)$$

と定義される。社会的厚生を極大化の必要条件は、不連続点  $r^0, r^{oo}$  を除く  $r \in [0, 1]$  においては

$$\frac{dSW(r^*)}{dr} \begin{cases} < 0 & r^* = 0 \text{ の時} \\ = 0 & r^* \in [0, 1] \text{ の時} \\ > 0 & r^* = 1 \text{ の時} \end{cases} \quad (28)$$

で定義される。不連続点  $r^0$  (もしくは、 $r^{oo}$ ) においては

$$\begin{aligned} \frac{dSW(r^{0-})}{dr} > 0 & \quad SW(r^{0-}) > SW(r^{0+}) \text{ の時} \\ \frac{dSW(r^{oo+})}{dr} < 0 & \quad SW(r^{oo-}) < SW(r^{oo+}) \text{ の時} \end{aligned} \quad (29)$$

で定義される。ただし、 $SW(r^{0-}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} SW(r^{0-} - \epsilon)$ ,  $SW(r^{0+}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} SW(r^{0+} + \epsilon)$  である。付録IVに示すように、 $r = \{0, 1\}$  で社会的厚生が極大となる条件

$$SW'(0) = \xi\rho + \gamma\nu - (\alpha + c + 1)\tau < 0 \quad (30)$$

表-3 均衡解の社会的厚生と比較

Case	$SW(0.5) - SW(0) > 0$ となる条件
a	$(c - 1 + 0.5^\alpha)\tau > 0$
b,c	$2(\zeta + \gamma)(1 - 0.5^\nu) - \{C_b^*(0.5) + \frac{\lambda_b^*(0.5)}{\xi}\} - (1 - 0.5^\alpha)\tau > 0$
d,e	$2(\zeta + \gamma)(1 - 0.5^\rho) - (1 - 0.5^\alpha)\tau > 0$

表中の記号  $\zeta, C_b^*, \lambda_b^*$  の詳細は付録I参照のこと。

は $\alpha$ または $\tau$ が十分に大きい時に成立する。ただし、 $\rho = \frac{\theta \nu}{\theta + 1}, \theta = \xi - 1, \nu = \frac{\eta \theta}{1 + \theta + \eta \theta}, \gamma = (\frac{\rho}{\theta})^{\frac{\theta}{1+\theta}} (\frac{\rho}{\nu})^\rho, \nu = \rho + 1$  である。 $r = 0.5$  での社会的厚生を極大化条件は

$$SW''(0.5) = \Psi_b''(0.5) - 4\Psi_b'(0.5) - R''(0.5) < 0 \quad (31)$$

となる。 $\Psi_b''(0.5) = \frac{d^2\Psi_b(r)}{dr^2}|_{r=0.5}, \Psi_b'(0.5) = \frac{d\Psi_b(r)}{dr}|_{r=0.5}, R''(0.5) = \frac{dR^2(r)}{dr^2}|_{r=0.5}$  である。

特性4 条件(30)が成立する場合、一斉始業均衡  $r = \{0, 1\}$  は社会的厚生を極大化する。安定的な市場均衡解  $r = 0.5$  において条件(31)が成立する場合、時差始業均衡 ( $r = 0.5$ ) は社会的厚生を極大化する。

$r = 0$  ( $r = 1$ ) と  $r = 0.5$  の社会的厚生を比較する。表-3の条件が成立する場合、時差出勤解  $r = 0.5$  の社会的厚生が一斉始業均衡解の社会的厚生よりも大きくなる。 $\alpha$  および  $\tau$  が十分大きくなれば  $SW(0.5) - SW(0) < 0$  となり、一斉始業均衡の社会的厚生が大きくなる。時差始業均衡が一斉始業均衡よりも効率的になるためには、 $\alpha$  および  $\tau$  が十分小さい値をとる必要がある。

特性5  $r = \{0, 0.5, 1\}$  がともに安定均衡解である場合、表-3の条件が成立すれば、時差始業均衡解  $r = 0.5$  は一斉始業均衡  $r = \{0, 1\}$  よりも効率的となる。

なお、以上の議論は複数均衡解が存在する場合における2種類の市場均衡解  $r = 0$  と  $r = 0.5$  の厚生比較を行ったものである。当然のことながら、 $r = 0, r = 0.5$  以外に社会的厚生を最大にするような解が存在する可能

表-4 数値計算のパラメータ値

事例	パターン	$\eta$	$\xi$	$c$	$H$	$\tau$	$\alpha$
1)	c	2.5	2.5	0.25	8.0	2.6	0.25
2)	b	2.5	2.5	0.25	8.0	1.8	0.25
3)	a	2.5	2.5	0.25	8.0	1.1	0.25
4)	b	2.5	2.5	0.25	8.0	1.8	0.90

性があることは否定できない。しかし、 $r = 0, r = 0.5$  以外の最適解の可能性に関しては解析的に検討することは不可能であり、数値計算により検討せざるを得ない。

### (5) 時差出勤の実現可能性

以上の分析の結果、表-2に示すように少なくとも3種類の安定均衡解のパターンが存在する可能性があることが判明した。時間的集積の経済性が十分に小さい場合、時差始業均衡が唯一の均衡解となる。この場合、市場メカニズムにより時差出勤が実現する。一方、時間的集積の経済性が混雑による外部不経済を大きく卓越する場合、一斉始業均衡のみが市場均衡となる。このような場合には、企業は時差出勤を行うインセンティブは持たないだろう。時間的集積の経済性と混雑による外部不経済がともに十分大きい場合、市場メカニズムは非常に複雑となり一斉始業均衡と時差始業均衡という複数の均衡解が存在する可能性がある。いま、一斉始業均衡と時差始業均衡という3つの安定均衡解が存在し、後者の社会的厚生が大きくなる場合に着目しよう。3つの均衡解はいずれも局所的に安定的である。歴史的な過程により一斉始業均衡解に到達していれば、効率性の悪い一斉始業均衡状態にロックインされる。企業が単独に始業時刻を変更しようとしても、その企業に勤務する家計の効用の低下を招くため、時差始業均衡を市場メカニズムで実現することは不可能となる。時差始業均衡を実現するためには、企業の一部が集団的に時差出勤を実施することが必要となる。あるいは、鉄道企業が輸送計画を漸次的に変更し、社会的最適に最適な時差始業均衡を誘導することが必要となる。このような時差始業均衡を実現させるための方策に関しては本稿の域を越えているので、今後の課題としたい。当然のことながら、以上の分析結果は本研究で採用したいくつかの仮定の下で成立する事項であり、以上の知見を一般的な議論に敷衍することは危険である。しかし、簡単な思考実験を通じて鉄道通勤市場において時差出勤制度の普及が進展しない理由の1側面を明らかにしえたと考える。

## 5. 数値計算事例

簡単な計算事例を通じて、以上の分析結果を数値的

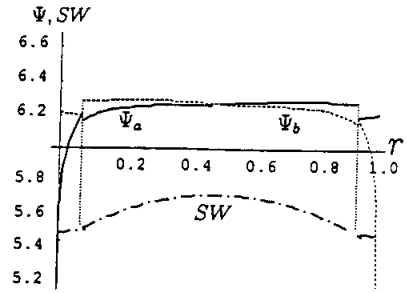


図-3  $r$ と $\Psi, SW$ の関係 (事例1)

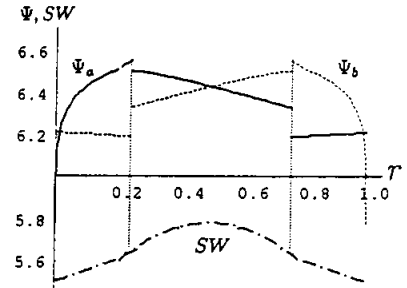


図-4  $r$ と $\Psi, SW$ の関係 (事例2)

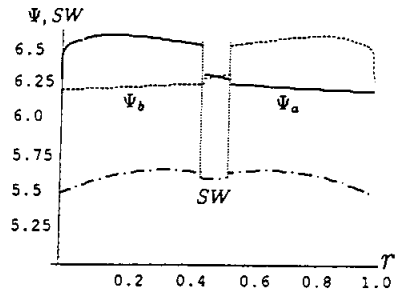


図-5  $r$ と $\Psi, SW$ の関係 (事例3)

に確認してみよう。表-4に示すようなケースに対して数値計算を行った。同表の第2列の英字は表-1に示す通勤パターンに対応している。まず、市場均衡解のパターンについて分析してみよう。事例1)~3)では、始業時刻の時差 $\tau$ 以外のパラメータを固定し、 $\tau$ の値のみを変化させた場合を想定している。事例1)では $r = 0, 1$ が安定均衡解(図-3)、事例2)では $r = 0, 0.5, 1$ が安定均衡解(図-4)、事例3)では $r = 0.5$ が安定均衡解(図-5)となっており、始業時差 $\tau$ の値によって市場均衡解のパターンが異なることがわかる。事例1)2)に示すように $\tau$ の値が十分大きい時には条件(23)を満足し一斉始業均衡 $r = 0, r = 1$ が安定均衡となる。事例1)では条件(26)が成立するが、事例2)では(25)が成立する。したがって、事例1)の場合には $r = 0.5$ は不安定均衡解となり、事例2)では安定均衡解となる。さらに、事例3)のように $\tau$ が十分小さくなれば、式(24)が



成立することとなり、時差始業均衡が唯一の安定均衡解となる。このように、始業時差 $r$ が大きくなれば、時差出勤により失われる時間的集積の経済性は大きくなるため一斉始業均衡が現れる。一方、始業時差が小さい場合、家計を始業時刻の異なる企業に分散化を図る時差始業均衡が現れることが確認できる。事例2)の場合、3つの均衡解が存在するが、時差出勤均衡の社会的厚生が最も大きくなっている。この場合、歴史的な経緯により市場が $r = 0, r = 1$ という一斉始業均衡にロックインされた場合、社会的に効率の悪い均衡解にとどまることとなる。3つの事例は始業時差のみを変化させたものであり、事例間での社会的厚生と比較が可能である。3つの事例の社会的厚生はいずれも $r = 0.5$ で極大となり、同時に大域的な最適解になっている。その値は事例1)で5.72、事例2)で5.78、事例3)で5.62となり、事例2)の場合の社会的厚生がもっとも大きい。ただし事例1)では $r = 0.5$ は安定均衡解でないため、社会的厚生は一斉始業均衡の低い値5.44にとどまる。以上の数値計算の結果に基づけば、社会的厚生が最大になるような最適な始業時差が存在していることが推察される。本研究では始業時差を外生的パラメータと扱っていた。今後は最適な始業時差を求める問題、さらには最適な始業時刻分布を求める問題に関して分析を行う必要があると考える。

つぎに、時間的集積の経済性を表すパラメータ $\alpha$ と市場均衡解の社会的効率性の関係を検討してみよう。ここでとりあげた事例4)は、表-4に示すように、先の事例2)に比べて集積の経済性を表すパラメータ $\alpha$ のみが大きく、時間的集積の効果がより強く現れるような場合を想定している。事例2)と事例4)の計算結果を比較しよう。事例2)では $r = 0.5$ で社会的厚生が極大となり、同時に大域的な最適解になっていたが、事例4)では図-6に示すように $r = 0.5$ で局所的な極小値をとる。事例4)の場合、時差始業均衡は安定的でないが、もし時差出勤政策により実現できたとしても効率性は一斉始業均衡より低い水準にとどまる。このように時間的集積の経済性が大きくなると、時差出勤均衡は効率的でなくなり、一斉始業均衡が社会的にも望ましい最適解となることが理解できる。

## 6. おわりに

本研究では、大都市の鉄道通勤に対する時差出勤施策の経済効果とその導入方法を明らかにするために、理論的な検討を実施した。その結果、時間的集積の経済が存在する場合、1)出勤時刻分布に関する市場均衡には複数の均衡解が存在すること、2)一度社会全体が効率性の低い一斉始業均衡に到達すれば、そこで

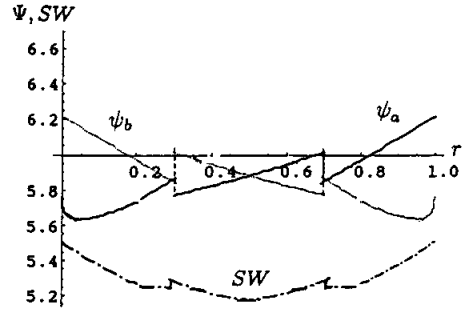


図-6  $r$ と $\Psi, SW$ の関係(事例4)

ロックインされる可能性があることを示した。社会全体が一つの均衡解に到達すれば、市場メカニズムにより、より効率的な均衡解に移行することは不可能であり、行政主体による強制的な時差出勤政策の導入が不可欠になることを示した。時差始業均衡も1つの市場均衡であるが、時差始業均衡が一斉始業均衡よりも常に効率的であるという保証はないことも明らかとなった。このことは時差出勤制度の導入にあたっては慎重な検討が必要であることを示唆している。

なお、本研究では理論的な簡潔さを追求したため、現実性に乏しい仮定を置いている。特に、始業時刻を2時点に限定し、すべての一般企業が同質的な技術を保有していると仮定している。実際には、従業員の始業時刻は時間軸上に分布しており、都市内には技術の異なるさまざまな業種の企業が存在している。今後は、複数の始業時刻、産業構造を持つ都市の分析に発展させる必要がある。特に、今後実証分析を行うためには、このようなモデルの精緻化が不可欠であると考えられる。さらに、本研究では企業があらかじめ決められた出勤時間を選択する問題として定式化している。このような始業時間の選択肢は外生的に与えられており、企業が勤務時間のパターンを決定したわけではない。近年では、時差出勤施策と並んで、フレックスタイム制度の導入が進んでいる。このようなフレックスタイム制度の導入インセンティブを分析するためには、企業の勤務時間の設定行動を内生化したような均衡モデルを開発する必要がある。なお、本研究の遂行にあたって永野光三氏(株)中央復建コンサルタンツ)との議論を通じて多くの知見を得ている。感謝の意を表します。

## 付録I 最適制御問題の解の導出

問題(13a)-(13j)のハミルトニアン $H$ を $H = \lambda_1 \Omega + \lambda_2 su - u^\xi$ と定義する。 $\Omega = c/(\eta s^{\eta-1})$ である。状態変数にjumpが存在する場合のポントリャーギンの最大値原理<sup>16)17)</sup>より最適性の必要条件は式(13b)-(13j)、

及び任意の  $t \in (\underline{T}_a, T_a) \cup (T_a, T_b)$  に対して

$$\partial H / \partial u(t) = 0 \quad (32)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -(\partial H / \partial s) = -\lambda_1(\partial \Omega / \partial s) - \lambda_2 u \quad (33)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -(\partial H / \partial M) = 0 \quad (34)$$

が成立。最適値関数を  $V^* = \Xi^* + \int_{T_a^-}^{T_a^+} \{-u^* \xi + \lambda_1(\Omega(s^*) - \dot{s}^*) + \lambda_2(s^* u^* - \dot{M}^*)\} dt + \int_{T_a^+}^{T_b} \{-u^* \xi + \lambda_1(\Omega(s^*) - \dot{s}^*) + \lambda_2(s^* u^* - \dot{M}^*)\} dt$  と定義する。記号  $*$  は最適軌道を表し、 $\Xi^* = -\{rs(T_a^-)^{*n} + (1-r)s(T_b)^{*n}\}$  である。式 (13b), (13c) より上式は任意の関数  $\lambda_1, \lambda_2$  に対して成立。部分積分により、 $V^* = \Xi^* + \int_{T_a^-}^{T_a^+} \{H + \dot{\lambda}_1 s^* + \dot{\lambda}_2 M^*\} dt - [\lambda_1 s^* + \lambda_2 M^*]_{T_a^-}^{T_a^+} + \int_{T_a^+}^{T_b} \{H + \dot{\lambda}_1 s^* + \dot{\lambda}_2 M^*\} dt - [\lambda_1 s^* + \lambda_2 M^*]_{T_a^+}^{T_b}$  が成立する。ラグランジュ関数を  $L = V + \mu_1 \{s(T_a^-) - s(T_a^+)\} + \mu_2 \{M(T_a^-) - M(T_a^+) - r\} + \rho_1^- s(T_a^-) + \rho_1^+ s(T_a^+) + \rho_2^- M(T_a^-) + \rho_2^+ M(T_a^+)$  と定義する。 $\mu_1, \mu_2, \rho_1^-, \rho_1^+, \rho_2^-, \rho_2^+$  はラグランジュ乗数。最適な  $\lambda_1^*, \lambda_2^*$  に対して式 (33)(34) が成立し  $\partial L^* / \partial s^*(T_a^-) = -\eta s(T_a^-)^{\eta-1} r - \lambda_1^*(T_a^-) + \mu_1^* + \rho_1^- = 0$  を得る。同様に、状態変数は時点  $T_a^-, T_a^+$  で

$$-\eta s(T_a^-)^{\eta-1} r - \lambda_1^*(T_a^-) + \mu_1^* + \rho_1^- = 0 \quad (35)$$

$$-\eta s(T_a^+)^{\eta-1} (1-r) + \lambda_1^*(T_a^+) - \mu_1^* + \rho_1^+ = 0 \quad (36)$$

$$\mu_1^* \geq 0 \quad \mu_1^* \{s^*(T_a^-) - s^*(T_a^+)\} = 0 \quad (37)$$

$$-\lambda_2^*(T_a^-) + \mu_2^* + \rho_2^- = 0 \quad (38)$$

$$\lambda_2^*(T_a^+) - \mu_2^* + \rho_2^+ = 0 \quad (39)$$

$$\mu_2^* \geq 0 \quad \mu_2^* \{M^*(T_a^-) - M^*(T_a^+) - r\} = 0 \quad (40)$$

$$\rho_1^- s^*(T_a^-) = 0 \quad \rho_1^+ s^*(T_a^+) = 0 \quad (41)$$

$$\rho_2^- M^*(T_a^-) = 0 \quad \rho_2^+ M^*(T_a^+) = 0 \quad (42)$$

を満足する。1)  $r \neq 0, r \neq 1$  の時 式 (13f) より  $M^*(T_a^-) \geq r > 0$  より  $\rho_2^- = 0$ 。式 (13b) より  $s^*(t)$  は  $t \in (\underline{T}_a, T_a^-)$  に関して増加関数であり  $s^*(T_a^-) > 0$ 。ゆえに、 $\rho_1^- = 0$ 。1-1)  $s^*(T_a^-) - s^*(T_a^+) > 0$  の時式 (37) より  $\mu_1^* = 0$ 。式 (38)(39) より  $\lambda_2^*(T_a^-) = \lambda_2^*(T_a^+) + \rho_2^+$ 。a)  $s^*(T_a^+) = 0$  の時 区間  $(\underline{T}_a, T_a)$ ,  $(\underline{T}_b, T_b)$  のそれぞれの区間に対して独立に最適経路を求める。式 (13b), 最適化条件 (32)-(34) より次式が成立。

$$s(t) = (ct + C_k)^{\frac{1}{\xi}} \quad (43)$$

$$u(t) = \left(\frac{\lambda_{2k}}{\xi}\right)^{\frac{1}{\theta}} (ct + C_k)^{\frac{1}{\theta \psi}} \quad (44)$$

$$M(t) = \frac{l}{c} \left(\frac{\lambda_{2k}}{\xi}\right)^{\frac{1}{\theta}} \left\{ (ct + C_k)^{\frac{1}{\theta}} - (c\underline{T}_k + C_k)^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (45)$$

$$\frac{l}{c} \left(\frac{\lambda_{2k}}{\xi}\right)^{\frac{1}{\theta}} \left\{ (cT_k + C_k)^{\frac{1}{\theta}} - (c\underline{T}_k + C_k)^{\frac{1}{\theta}} \right\} = r_k \quad (46)$$

$C_k$  は区間  $(\underline{T}_k, T_k)$  における積分定数、 $\theta = \xi - 1$ ,  $\psi = 1/(1 + \theta + \eta\theta)$ ,  $l = \eta\theta\psi$  である。区間  $t_k \notin [\underline{T}_k, T_k]$  で  $s(t_k) = 0$  となり、 $C_k = -c\underline{T}_k$ 。式 (44)-(46) より

$\int_{\underline{T}_k}^{T_k} u(t) \xi dt = \lambda_{2k} r_k / \xi$ 。  $r_k$  は  $r_a = r, r_b = 1 - r$ 。最適値関数  $V_k^* = -r(cT_k - c\underline{T}_k) - \frac{\lambda_{2k}}{\xi} r_k$ 。式 (46) より  $\underline{T}_k = T_k - \frac{1}{c} \left(\frac{\lambda_{2k}}{\xi}\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\frac{r_k}{\xi}\right)^{\frac{1}{\theta}}$  を得る。区間  $(\underline{T}_k, T_k)$  における最適値関数は  $\lambda_{2k}$  の関数  $V_k^*(\lambda_{2k}) = r_k \left\{ -\left(\frac{\lambda_{2k}}{\xi}\right)^{-\frac{1}{\theta}} \left(\frac{r_k}{\xi}\right)^{\frac{1}{\theta}} - \frac{\lambda_{2k}}{\xi} \right\}$  となる。 $\partial V_k^*(\lambda_{2k}) / \partial \lambda_{2k} = 0$  より最適解  $\lambda_{2k}^* = \xi \gamma r_k^\rho$  を得る。 $\rho = \theta / (\theta + 1)$ ,  $\gamma = \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta+1}} \left(\frac{r_k}{\xi}\right)^\rho$  である。 $t \in [\underline{T}_k, T_k)$  に対して以下の最適解を得る。

$$s(t) = (ct - cT_k + c\tilde{T} r_k^\rho)^{\frac{1}{\xi}} \quad (47)$$

$$u(t) = \gamma^{\frac{1}{\theta}} r_k^{\frac{1}{\theta+1}} (ct - cT_k + c\tilde{T} r_k^\rho)^{\frac{1}{\theta \psi}} \quad (48)$$

$$M(t) = \frac{l}{c} \gamma^{\frac{1}{\theta}} r_k^{\frac{1}{\theta+1}} (ct - cT_k + c\tilde{T} r_k^\rho)^{\frac{1}{\theta}} \quad (49)$$

$$\underline{T}_k = T_k - \tilde{T} r_k^\rho \quad (50)$$

$\tilde{T} = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{-\frac{1}{\theta+1}} \left(\frac{r_k}{\xi}\right)^\rho$  である。家計の出勤時における通勤不効用とグループごとの総輸送費用は  $U_k = c\tilde{T} r_k^\rho$ ,  $TC_k = \gamma r_k^\nu$ 。  $\nu = \rho + 1$ 。本ケースをパターン A と呼ぶ。本ケースは  $\tilde{T}(1-r)^\rho \leq \tau$  のときに成立。b)  $s^*(T_a^+) > 0$  の時 区間  $[\underline{T}_a, T_a)$  に関しては a) の場合と同様。区間  $(T_a, T_b)$  では、 $\underline{T}_b = T_a^+$  が成立。始点時刻が既知で始点ハミルトニアンが未知の最適制御問題となる。最適値関数は  $V_b^*(\lambda_2) = -(1-r)C_b - \frac{\lambda_2}{\xi}(1-r)$ 。  $C_b$  は式 (46) を満足することに留意すれば、最適値関数を最大にする  $\lambda_2$  において  $C_b$  は、

$$\frac{l}{\theta} \left(\frac{c(1-r)}{l}\right)^{-\theta} \left\{ (cT_b + C_b)^{\frac{1}{\theta}} - (cT_a + C_b)^{\frac{1}{\theta}} \right\}^\xi - \left\{ (cT_b + C_b)^{\frac{1}{\theta-1}} - (cT_a + C_b)^{\frac{1}{\theta-1}} \right\} = 0 \quad (51)$$

を満足する。上式を満足する  $C_b$  を  $C_b^*$  とすると、 $\lambda_2$  の最適な水準は  $\lambda_2^* = \xi \left(\frac{c(1-r)}{l}\right)^\theta \left\{ (cT_b + C_b^*)^{\frac{1}{\theta}} - (cT_a + C_b^*)^{\frac{1}{\theta}} \right\}^{-\theta}$  となる。 $t \in (\underline{T}_b, T_b)$  における最適解は

$$s(t) = (ct + C_b^*)^{\frac{1}{\xi}} \quad (52)$$

$$u(t) = \left(\frac{\lambda_2^*}{\xi}\right)^{\frac{1}{\theta}} (ct + C_b^*)^{\frac{1}{\theta \psi}} \quad (53)$$

$$M(t) = \frac{l}{c} \left(\frac{\lambda_2^*}{\xi}\right)^{\frac{1}{\theta}} \left\{ (ct + C_b^*)^{\frac{1}{\theta}} - (c\underline{T}_b + C_b^*)^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (54)$$

となる。タイプ b の通勤不効用と総輸送費用は  $U_b = C_b^* + cT_b$ ,  $TC_b = \frac{\lambda_2^*(1-r)}{\xi}$ 。本ケースをパターン B と呼ぶ。本ケースは、 $\tilde{T} r^\rho > \tau$  の時に成立。ケース 1-2)  $s^*(T_a^-) - s^*(T_a^+) = 0$  の時 区間  $(\underline{T}_a, T_a)$  で  $\bar{M}(t) = M(t)$ , 区間  $[T_a, T_b]$  で  $\bar{M}(t) = M(t) + r$  となる関数を定義すれば、参考文献<sup>13)</sup>と同様の議論が可能。本ケースをパターン C と呼ぶ。解はパターン A で  $r = 1$  と代入したものに一致し、 $t \in (\underline{T}_a, T_b)$  において

$$s(t) = (ct - cT_b + c\tilde{T})^{\frac{1}{\xi}} \quad (55)$$

$$u(t) = \gamma^{\frac{1}{\theta}} (ct - cT_b + c\tilde{T})^{\frac{1}{\theta \psi}} \quad (56)$$

$$\bar{M}(t) = \frac{l}{c} \gamma^{\frac{1}{\theta}} (ct - cT_b + c\tilde{T})^{\frac{1}{\theta}} \quad (57)$$

$$\underline{T}_a = \underline{T}_b = T_b - \tilde{T} \quad (58)$$

付表-1 通勤トリップに関わる不効用 $\Phi_k(r)$ と $R(r)$

a	$\Pi^* \geq \Pi > 0$	$\Phi_a(r)$	$\Phi_b(r)$	$R(r)$
a-1	$\Pi^{\frac{1}{\rho}} \geq r \geq 0$	$\zeta\{1+r^\rho\} - cr$	$\zeta\{1+(1-r)^\rho\}$	$\gamma\{1+r^\nu + (1-r)^\nu\}$
a-2	$r^{\infty} > r > \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	$\zeta + C_a^* - cr$	$\zeta\{1+(1-r)^\rho\}$	$\gamma\{1+(1-r)^\nu\} + \frac{\lambda_{2a}^*}{\xi} r$
a-3	$r^{\infty} \geq r \geq r^{\infty}$	$2\zeta - cr$	$2\zeta - cr$	$2\gamma$
a-4	$1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}} > r > r^{\infty}$	$\zeta\{1+r^\rho\}$	$\zeta + C_b^* - cr$	$\gamma\{1+r^\nu\} + \frac{\lambda_{2b}^*}{\xi}(1-r)$
a-5	$1 \geq r \geq 1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	$\zeta\{1+r^\rho\}$	$\zeta\{1+(1-r)^\rho\} - cr$	$\gamma\{1+r^\nu + (1-r)^\nu\}$
b	$\Pi^{**} \geq \Pi > \Pi^*$	$\Phi_a(r)$	$\Phi_b(r)$	$R(r)$
b-1	$\Pi^{\frac{1}{\rho}} \geq r \geq 0$	$\zeta\{1+r^\rho\} - cr$	$\zeta\{1+(1-r)^\rho\}$	$\gamma\{1+r^\nu + (1-r)^\nu\}$
b-2	$r^{\infty} \geq r > \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	$\zeta + C_a^* - cr$	$\zeta\{1+(1-r)^\rho\}$	$\gamma\{1+(1-r)^\nu\} + \frac{\lambda_{2a}^*}{\xi} r$
b-3	$r^{\infty} > r > r^{\infty}$	$\zeta r^\rho + C_a^*$	$\zeta(1-r)^\rho + C_b^*$	$\gamma\{r^\nu + (1-r)^\nu\} + \frac{\lambda_{2a}^*}{\xi} r + \frac{\lambda_{2b}^*}{\xi}(1-r)$
b-4	$1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}} > r \geq r^{\infty}$	$\zeta\{1+r^\rho\}$	$\zeta + C_b^* - cr$	$\gamma\{1+r^\nu\} + \frac{\lambda_{2b}^*}{\xi}(1-r)$
b-5	$1 \geq r \geq 1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	$\zeta\{1+r^\rho\}$	$\zeta\{1+(1-r)^\rho\} - cr$	$\gamma\{1+r^\nu + (1-r)^\nu\}$
c	$0.5^\rho \geq \Pi > \Pi^{**}$	$\Phi_a(r)$	$\Phi_b(r)$	$R(r)$
c-1	$r^{\infty} \geq r \geq 0$	$\zeta\{1+r^\rho\} - cr$	$\zeta\{1+(1-r)^\rho\}$	$\gamma\{1+r^\nu + (1-r)^\nu\}$
c-2	$\Pi^{\frac{1}{\rho}} \geq r > r^{\infty}$	$2\zeta r^\rho$	$\zeta(1-r)^\rho + C_b^*$	$\gamma\{2r^\nu + (1-r)^\nu\} + \frac{\lambda_{2b}^*}{\xi}(1-r)$
c-3	$1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}} > r > \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	$\zeta r^\rho + C_a^*$	$\zeta(1-r)^\rho + C_b^*$	$\gamma\{r^\nu + (1-r)^\nu\} + \frac{\lambda_{2a}^*}{\xi} r + \frac{\lambda_{2b}^*}{\xi}(1-r)$
c-4	$r^{\infty} > r \geq 1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	$\zeta r^\rho + C_a^*$	$2\zeta(1-r)^\rho$	$\gamma\{r^\nu + 2(1-r)^\nu\} + \frac{\lambda_{2a}^*}{\xi} r$
c-5	$1 \geq r \geq r^{\infty}$	$\zeta\{1+r^\rho\}$	$\zeta\{1+(1-r)^\rho\} - cr$	$\gamma\{1+r^\nu + (1-r)^\nu\}$
d	$1 \geq \Pi > 0.5^\rho$	$\Phi_a(r)$	$\Phi_b(r)$	$R(r)$
d-1	$r^{\infty} \geq r \geq 0$	$\zeta\{1+r^\rho\} - cr$	$\zeta\{1+(1-r)^\rho\}$	$\gamma\{1+r^\nu + (1-r)^\nu\}$
d-2	$1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}} > r > r^{\infty}$	$2\zeta r^\rho$	$\zeta(1-r)^\rho + C_b^*$	$\gamma\{2r^\nu + (1-r)^\nu\} + \frac{\lambda_{2b}^*}{\xi}(1-r)$
d-3	$\Pi^{\frac{1}{\rho}} \geq r \geq 1 - \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	$2\zeta r^\rho$	$2\zeta(1-r)^\rho$	$2\gamma\{r^\nu + (1-r)^\nu\}$
d-4	$r^{\infty} > r > \Pi^{\frac{1}{\rho}}$	$\zeta r^\rho + C_a^*$	$2\zeta(1-r)^\rho$	$\gamma\{r^\nu + 2(1-r)^\nu\} + \frac{\lambda_{2a}^*}{\xi} r$
d-5	$1 \geq r \geq r^{\infty}$	$\zeta\{1+r^\rho\}$	$\zeta\{1+(1-r)^\rho\} - cr$	$\gamma\{1+r^\nu + (1-r)^\nu\}$
e	$\Pi > 1$	$\Phi_a(r)$	$\Phi_b(r)$	$R(r)$
e	$1 \geq r \geq 0$	$2\zeta r^\rho$	$2\zeta(1-r)^\rho$	$2\gamma\{r^\nu + (1-r)^\nu\}$

注) 第2列は各ケースが成立するための条件を表す。表中の記号は、 $\theta = \xi - 1$ ,  $\iota = \eta\theta/(1 + \theta + \eta\theta)$ ,  $\rho = \frac{\theta}{\theta+1}$ ,  $\nu = \rho + 1$ ,  $\zeta = (\frac{\theta}{\theta+1})^{\frac{1}{\rho+1}} (\frac{\theta}{\theta+1})^{\frac{1}{\rho}}$ ,  $\gamma = \frac{\zeta}{\theta}$ ,  $\Pi = \frac{c\tau}{\theta}$ ,  $\Pi^*$ は $r^{\infty} = 0.5$ を満足する $\Pi$ ,  $\Pi^{**}$ は $r = \Pi^{\frac{1}{\rho}}$ を満足する $\Pi$ ,  $\gamma = (\frac{\theta}{\theta+1})^{\frac{\theta}{\rho+1}} (\frac{\theta}{\theta+1})^{\frac{1}{\rho}}$ ,  $\zeta = \frac{\theta^\nu}{\theta}$ ,  $C_a^*$ は $\frac{\zeta}{\theta} (c\tau)^{\frac{1}{\rho}} - \theta \{C_a^{\frac{1}{\rho}} - (-cr + C_a^*)^{\frac{1}{\rho}}\}^\xi = C_a^{\frac{1}{\rho}-1} - (-cr + C_a^*)^{\frac{1}{\rho}-1}$ を満足する積分定数値,  $\lambda_{2a}^* = \frac{\iota \xi}{\theta} \frac{C_a^{\frac{1}{\rho}-1} - (-cr + C_a^*)^{\frac{1}{\rho}-1}}{C_a^{\frac{1}{\rho}-1} - (-cr + C_a^*)^{\frac{1}{\rho}-1}}$ ,  $C_b^*$ ,  $\lambda_{2b}^*$ も同様に定義できる。

を得る。各タイプの通勤不効用は $U_a = c\bar{T} - cr$ ,  $U_b = c\bar{T}$ , 総輸送費用は $TC = \gamma$ 。本ケースが成立するための条件を以下で考察する。後述するように、タイプaの家計の比率 $r$ を1から徐々に減少させていけば、通勤パターンBのあとにパターンCが現れる。本ケースの成立条件を求めることは、その境界となる $r$ を求めることに他ならない。しかしながら、パターンBにおいて乗車密度 $s(t)$ , 輸送力 $\alpha(t)$ , 累積出社者数 $M(t)$ などの諸関数は、陽に求めることのできない $C_b^*$ の項を含んでいるため、そのような $r$ を解析的に求めることはできない。ここではまず、パターンBにおける諸関数の $r$ に対する挙動を明らかにしたのち、本ケースの成立条件を示すこととする。通勤パターンの現れ方は各タイプの家計の比率に依存している。 $\bar{T} > \tau$ が成り立っている場合、比率 $1-\varepsilon$ ではパターンAが現れる。 $r$ が1から次第に小さくなるに従って、タイプbの家計の最早出社時刻 $\bar{T}_b$ が早くなり、タイプaの家計の始業時刻 $T_a$ と接することになる。これを境にパターンBが現れる。パターンBが成り立つ範囲

で $r$ が減少すると、式(47)(48)(49)より、区間 $[T_a, T_a]$ において乗車密度、輸送力、累積出社者数はともに減少することが分かる。また、付録IIより $dC_b^*/dr < 0$ であるから、式(52)より $\frac{ds}{dr} = \frac{1}{\eta}(ct + C_b^*)^{\frac{1}{\rho}-1} \frac{dC_b^*}{dr} < 0$ 、式(54)より、 $\frac{dM}{dr} = \frac{\partial M}{\partial r} + \frac{\partial M}{\partial C_b^*} \frac{dC_b^*}{dr} = -\frac{D^{a+1} - A^{a+1}}{B^{a+1} - A^{a+1}} + \frac{(1-r)(a+1)}{(B^{a+1} - A^{a+1})^2} \{ (D^a - A^a)(B^{a+1} - A^{a+1}) - (D^{a+1} - A^{a+1})(B^a - A^a) \} \frac{dC_b^*}{dr}$ 。ただし、 $A = cT_a + C_b^*$ ,  $B = cT_b + C_b^*$ ,  $D = ct + C_b^*$ ,  $a = \frac{1}{\rho} - 1$ 。上式第2項の分子の中括弧内に注目して、 $f(D) = (D^a - A^a)(B^{a+1} - A^{a+1}) - (D^{a+1} - A^{a+1})(B^a - A^a)$ とおく。 $df(D)/dD = 0$ より $D = a(B^{a+1} - A^{a+1})/(a+1)/(B^a - A^a)$ を得る。 $\frac{d^2 f(D)}{dD^2} \Big|_{D = \frac{a(B^{a+1} - A^{a+1})}{(a+1)(B^a - A^a)}} = -a(B^{a+1} - A^{a+1})D^{a-2} < 0$ が成り立つから、 $f(D)$ は $D = a(B^{a+1} - A^{a+1})/(a+1)/(B^a - A^a)$ において極大値をとる。 $B \geq D \geq A$ であるから、 $f(A) = 0$ ,  $f(B)$ であることより $f(D) \geq 0$ であることが分かる。従って、 $\frac{dM}{dr} < 0$ が成り立つ。以上より、パターンBが成り立つ範囲で $r$ が減少すると、

区間  $(T_b, T_b]$  において乗車密度、及び累積出社者数は増大することが分かる。なお、輸送力の増減に関しては、一概には言えない。以上より判るように、 $r$  が小さくなると、最適な乗車密度について  $s(T_a^-) = s(T_a^+)$  となるような  $r$  が現れるだろう。乗車密度は裁定条件 (7) を満たすので、これ以上  $r$  が小さくなればタイプ  $b$  の家計は区間  $(T_a, T_a)$  に流れ出すことになり、通勤時刻分布が一つの山になる。これがパターン B とパターン C との境界となる。すなわち、その境界となる  $r$  を  $r_s^0$  と定義すると、パターン C の成立条件は  $r < r_s^0$  となる。ただし、次のような場合は例外となる。この最適制御問題では社会的厚生  $SW$  を最大化していることから、もし  $s(T_a^-) > s(T_a^+)$  である  $r$  においてパターン B よりもパターン C の方が社会的厚生が大きくなるならば、 $r_s^0$  よりも大きな  $r$  において、鉄道企業はパターン C となるように輸送力の水準を設定する。従って、社会的厚生がパターン B とパターン C とで等しくなるような  $r$  を  $r_{SW}^0$  と定義して、 $r^0 = \max \{r_s^0, r_{SW}^0\}$  とすると、パターン C の成立条件は  $r \leq r^0$  と整理できる。この条件を満足しないときは、1-1) の場合に該当しパターン A または B となる。2)  $r = 0$  (あるいは  $r = 1$ ) の時 区間  $(T_b, T_b]$  (あるいは  $(T_a, T_a)$ ) において最適制御問題を解けばよい。解はパターン C に一致。同様に、帰宅時の問題も解くことができる。総輸送費用を全家計 (1 に基準化) が均等運賃により負担することから、 $R = TC_a + TC_b$ 。以上の結果を、整理すれば付表-1 を得る。

## 付録 II 通勤不効用関数の単調性

パターン a-2, b-2, b-3, c-3, c-4, d-4 以外のケースにおいて関数  $\Phi_a(r)$  は単調増加関数であることは自明。式 (51) の両辺を全微分することにより

$$\frac{dC_b^*}{dr} = \frac{-\theta\Gamma_1}{\xi(1-r)\Gamma_2} \quad (59)$$

を得る。  $\Gamma_1 = (B^{a+1} - A^{a+1})(B^a - A^a)$ ,  $\Gamma_2 = (B^a - A^a)^2 - \psi(B^{a+1} - A^{a+1})(B^{a-1} - A^{a-1}) = A^{a-1}B^{a-1}(A-B)^2 + \psi(B^{a+1} - A^{a+1})(B^{a-1} - A^{a-1})$ 。ただし、 $A = cT_a + C_b$ ,  $B = cT_b + C_b$ ,  $a = \frac{1}{\theta} - 1$  である。  $\Gamma_1 > 0$ ,  $\Gamma_2 > 0$  は容易に証明できるので省略。したがって、 $dC_b^*/dr < 0$ 。関数の対称性より  $dC_a^*/dr > 0$ 。

## 付録 III 市場均衡解の安定性条件

$r = \{0, 1\}$  が安定的な均衡解となる条件は、付表-1 より  $\Psi_a(0) < \Psi_b(0)$  を整理すれば次式を得る。

$$\zeta < (1-c)\tau \quad (60)$$

ただし、 $\theta = \xi - 1$ ,  $\psi = 1/(1 + \theta + \eta\theta)$ ,  $\iota = \eta\theta\psi$ ,  $\zeta = (\frac{1}{\theta})^{\frac{1}{1+\theta}} (\frac{\xi}{\theta})^{\frac{\theta}{1+\theta}}$  である。一方、 $r = 0.5$  の安定性条件は、

$\Psi'_a(0.5) < \Psi'_b(0.5)$  である。ただし、 $\Psi'_k = d\Psi_k/dr$ 。従って、 $r = 0.5$  が安定均衡解となる必要条件是

$$\begin{aligned} \alpha\tau 0.5^{\alpha-1} &< \zeta\rho 0.5^{\rho-1} + 2C' && \text{(Case b, c)} \\ \alpha\tau 0.5^{\alpha-1} &< 2\zeta\rho 0.5^{\rho-1} && \text{(Case d, e)} \end{aligned} \quad (61)$$

で与えられる。ただし、 $2C' = 2dC_a/dr = dC_a/dr - dC_b/dr > 0$  である。 $\alpha \geq 0$  は  $\zeta, \rho$  とは独立したパラメータであり、式 (61) を満足するパラメータが存在する。なお、Case a では  $r = 0.5$  は不安定均衡解である。

## 付録 IV 市場均衡解の効率性

式 (27) より  $SW'(r) = r\psi'_a(r) + (1-r)\psi'_b(r) + \psi_a(r) - \psi_b(r)$  を得る。ただし、 $SW' = dSW/dr$ ,  $\psi'_k = d\psi_k/dr$  である。付表-1 より  $\psi'_b(0) = -\tau\alpha + \zeta\rho + \gamma\nu$ 。これより  $r = 0$  が均衡解の時、 $SW'(0) = \psi'_b(0) + \psi_a(0) - \psi_b(0) = \xi\rho + \gamma\nu - (\alpha + c + 1)\tau$  より、この解が社会的厚生を極大化する条件は、

$$SW'(0) = \xi\rho + \gamma\nu - (\alpha + c + 1)\tau < 0 \quad (62)$$

となる。関数の対称性から  $SW'(1) = -SW'(0)$  が成立し、 $r = 1$  の極大化条件も同様である。 $r = 0.5$  について、 $\psi'_a(0.5) = -\psi'_b(0.5)$ ,  $\psi_a(0.5) = \psi_b(0.5)$  が成立する。したがって、 $SW'(0.5) = 0$  となり  $r = 0.5$  は極大化の 1 階の必要条件を満足する。 $r = 0.5$  が安定的な均衡解の時、条件 (25) より  $\Psi'_a(0.5) - \Psi'_b(0.5) = -2\Psi'_b(0.5) < 0$  を満足。ゆえに、 $\Psi'_b(0.5) > 0$ 。  $SW''(0.5) = 0.5(\Psi''_a(0.5) + \Psi''_b(0.5)) + 2(\Psi'_a(0.5) - \Psi'_b(0.5)) - R''(0.5)$ 。ただし、 $SW'' = d^2SW/dr^2$ ,  $\Psi''_k = d^2\Psi_k(r)/dr^2$ ,  $R'' = d^2R/dr^2$ 。  $\Psi''_a(0.5) = \Psi''_b(0.5)$ ,  $\Psi'_a(0.5) = -\Psi'_b(0.5)$  より、2 階の極大化条件は、

$$\Psi''_b(0.5) - 4\Psi'_b(0.5) - R''(0.5) < 0$$

で与えられる。条件 (23) 及び (25) が成立する場合、一斉始業均衡と時差始業均衡がともに安定的である。 $r = 0$  と  $r = 1$  の均衡解は対称的であるので  $r = 0$  と  $r = 0.5$  の社会的厚生を比較する。式 (20a), (20b) より、 $Y_b(0.5) - Y_b(0) = -(1 - 0.5^\alpha)\tau < 0$ 。これと付表-1 より、各ケースにおける  $SW(0.5) - SW(0)$  を計算すると表-3 を得る。

## 参考文献

- 1) 小野島清高・龍野彰男：岐阜市における交通需要マネジメントの効果に関する研究，土木計画学研究・講演集，No.18(1)，pp.421-424，1995。
- 2) 高山純一・谷英賢・木村実・小林正隆：金沢市における時差出勤制度の社会実験，土木計画学研究・講演集，No.20(2)，pp.831-834，1997。
- 3) Hall, R.: *Booms and Recessions in Noisy Economy*, Yale University Press, 1991。
- 4) Vickrey, W.: Congestion theory and transport investment, *American Economic Review*, Vol. 59, pp.251-260, 1969。

- 5) Henderson, J. V. : The economics of staggered work hours, *Journal of Urban Economics*, Vol.9, pp.349-364, 1981.
- 6) Henderson, J.V. : *Economic Theory and the Cities*, Academic Press, Chap.8, 1985. (折下功訳 : 経済理論と都市, 勁草書房, 1987.)
- 7) Filipiak, J.: Unloading of congestion in deterministic queuing networks, *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 2, pp. 33-45, 1981.
- 8) Hendrickson, C. and Kocur, G.: Schedule delay and departure time decisions in a deterministic model, *Transportation Science*, Vol. 15, pp.62-77, 1981.
- 9) Arnot, R., de Palma, A., and Lindsey, R.: A structural model of peak-period congestion: A traffic bottleneck with elastic demand, *The American Economic Review*, Vol. 83, pp. 161-179, 1993.
- 10) 松井寛: 交通需要の動学的分析の諸相と今後の展望, 土木学会論文集, No.470/IV-20, pp. 47-56, 1993.
- 11) de Palma, A., Ben-Akiva, M., Lefevre, C. and Liti-  
nas, N.: Stochastic model of peak period traffic con-  
gestion, *Transportation Science*, Vol. 17, pp. 430-453,  
1983.
- 12) 文世一・米川誠 : フレックスタイム制が混雑に及ぼす影  
響, 応用地域学会発表論文, 1997.
- 13) 小林潔司・奥村誠・永野光三: 鉄道通勤交通における出発  
時刻分布に関する研究, 土木計画学研究・論文集, No.14,  
pp.895-906, 1997.
- 14) 奥村誠・永野光三・小林潔司: 始業時刻の設定が鉄道通  
勤交通に及ぼす影響に関する研究, 土木計画学研究・論  
文集, No.15, pp.831-840, 1998.
- 15) 青木昌彦, 伊丹敬之: 企業の経済学, 岩波書店, 1985.
- 16) Vind, K.: Control systems with jumps in the state  
variables, *Econometrica*, Vol. 35, pp. 273-277, 1967.
- 17) Léonard, L. and Long, N.V.: *Optimal Control Theory  
and Static Optimization in Economics*, Cambridge  
University Press, pp. 310-332, 1992.
- 18) Boadway, R. and F. Flatters, Efficiency and equaliza-  
tion payments in a federal system of governments,  
*Canadian Journal of Economics*, 15, pp.613-633,  
1982.

(平成 11 年 1 月 12 日 受付)

## SOCIAL WELFARE AND INCENTIVE COMPATIBILITY OF RAILWAY COMMUTING WITH STAGGERED WORK HOURS

Makoto OKUMURA, Kiyoshi KOBAYASHI, and Shigeoki TANAKA

Staggered work hours policy is widely recognized as basic means to relax commuting congestion, but hardly implemented. This reluctance towards staggered work hours can be partly explained by the fact that firms can enjoy temporal agglomeration economies by synchronizing work hours to other firms. In this paper, an equilibrium model is presented to investigate how equilibrium distribution of work starting time is regulated by scale economies and congestion diseconomies. The multiplicity of equilibria is discussed to explain how commuting equilibria may be locked-in at an inefficient equilibrium.